Pyörivän laatikon paluu

Timo Eirola *   Harri Varpanen †

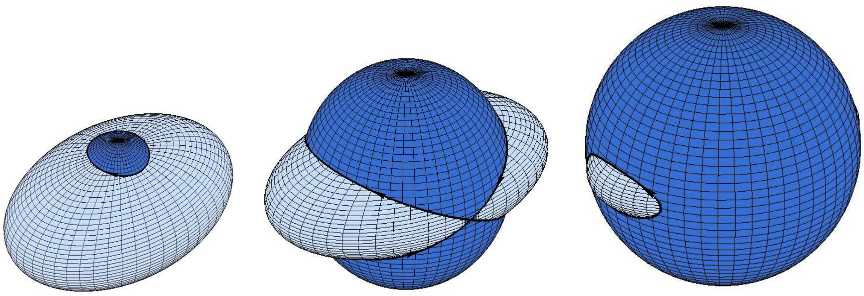
Harri Varpanen [5] pyrki pyörivän laatikon liikeyhtälöä analysoimalla selittämään, miksi laatikko pyörii vakaasti (stabiilisti) pisimmän ja lyhimmän akselinsa ympäri, mutta epävakaasti keskimmäisen akselinsa ympäri. Jukka Tuomela [4] tarkensi Varpasen analyysiä viittaamalla epävakaan pyörimisen osalta Grobman-Hartmanin lauseeseen ([2, s.168]) ja vakaan pyörimisen osalta Poincaré-Hopfin lauseeseen (esim. [3, s.214–215]).

Tuomelan argumentti ei täydellisesti selitä vakaata pyörimistä, sillä indeksin +1 tasapainopisteet voivat olla epävakaita lähteitä siinä missä vakaita nielujakin. Näiden tasapainopisteiden osoittaminen vakaiksi onnistuu seuraavalla energiatarkastelulla ([1, s.144–145]), joka selittää myös epävakaan pyörimisen.

Käytämme Tuomelan ja Varpasen merkintöjä. Olkoon ω kappaleen kulmanopeus. Koska m-massaisen pisteen r kulmamomentti (pyörimismäärä) on toisaalta [5, yhtälö (1)] $L_r = mr \times (\omega \times r)$ ja toisaalta [5, yhtälö (2)] $L_r = J_r\omega$, niin $\langle J_r\omega, \omega\rangle = m|\omega \times r|^2 = mv^2$. Integroimalla ([5, luku 3]) saadaan kappaleen energiaksi $E = \langle J\omega, \omega\rangle/2$, missä J on kappaleen inertiamatriisi. Kappaleeseen kiinnitetyssä kannassa pätee [5, yhtälö (4)] $\langle J\omega, \omega\rangle = \lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \lambda_3\omega_3^2$ ja kulmamomentille L pätee $L_i = \lambda_i\omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, joten energian säilymislain nojalla suure $L_1^2/\lambda_1 + L_2^2/\lambda_2 + L_3^2/\lambda_3$ on vakio. Toisaalta kulmamomentin säilymislain nojalla suure $|L|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ on vakio, joten

*Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto.
URL: http://math.tkk.fi/fi/henkilokunta/timo.eirola
Email: timo.eirola@aalto.fi
†Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto.
URL: http://math.tkk.fi/fi/henkilokunta/harri.varpanen
Email: harri.varpanen@aalto.fi

vektori L on aina origokeskisten ellipsoidi- ja pallopintojen leikkauskäyrällä. Ellipsoidin puoliakselien pituudet ovat $\sqrt{\lambda_i}$ ja siten verrannollisia laatikon dimensioihin. Edelleen liikeyhtälö [5, yhtälö (6)] voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa muodossa $L' = f(L)$, missä f on eräs vektorikenttä, ja tällöin ellipsoidipinnan ja koordinaattiakselien leikkauspisteet ovat vektorikentän tasapainopisteet. Pitämällä ellipsoidi kiinteänä ja muuttamalla pallon sädettä havaitaan (ks. kuvat), että ellipsoidi- ja pallopintojen leikkauskäyrät todellakin pysyvät vakaaksi väitettyjen tasapainopisteiden lähellä ja karkaavat epävakaiden tasapainopisteiden läheltä.



Viitteet

[1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics (2nd. ed.)*. Springer-Verlag, 1989.

[2] M. Hirsch, S. Smale, and R. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, And an Introduction to Chaos (2nd ed.)*. Academic Press, 2004.

[3] David S. Richeson. *Euler's Gem.* Princeton University Press, 2008.

[4] Jukka Tuomela. Epävakaa pyöriminen. *Arkhimedes* (2010), no. 1, s. 16.

[5] Harri Varpanen. Vakaa ja epävakaa pyöriminen. *Arkhimedes* (2009), no. 5, 10–13.