

# Jaksollisista jongleerauskuvioista

Harri Varpanen

Matematiikan pro gradu -tutkielma  
Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
syksy 2004



## Sisältö

Lukijalle	5
Luku 1. Siteswap-kuviot	7
Luku 2. Siteswap-kuvioiden generoiminen	15
Luku 3. Pallojen lukumäärä ja radat siteswap-kuviossa	23
Luku 4. Siteswap-kuvioiden lukumäärä	29
Luku 5. Siteswap-kuvioiden tilat ja siirtymät	37
Luku 6. Synchro-kuvioista	49
Luku 7. Multiplex-kuvioista	55
Liite A. Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut	59
Liite B. Kokonaislukujen jäännösluokat modulo $n$	63
Liite C. Äärellisten joukkojen permutaatiot	67
Liite D. Eulerin luvut	71
Liite E. Möbiusinversio	75
Liite F. Verkkoteorian terminologiaa	77
Liite G. Kirjallisuutta	79



## Lukijalle

Jongleerauskuvioiden motivoimia matemaattisia kysymyksiä on tutkittu vasta 1990-luvun alusta lähtien, sen jälkeen kun yhdysvaltalainen fyysikko Bruce Tiemann esitti tavan merkitä kuvioita lukujonoilla artikkelissa [14].<sup>1</sup> Pian tämän jälkeen matemaatikko Allen Knutson<sup>2</sup> kirjoitti aiheesta erinomaisen johdannon [9], joka kuitenkin ei ole matemaattinen artikkeli, vaan pikemminkin käytännön jonglööreille suunnattu teksti.

Vastaavanlaisia jonglööreille suunnattuja tekstejä on sittemmin kirjoitettu paljonkin (kattavin lienee [1]), mutta matemaattisia tekstejä aiheesta on toistaiseksi olemassa vain muutama. Tiedossani on kolme julkaistua artikkelia [3, 5, 13] sekä yksi kirja [12], mutta yhtenäinen johdanto puuttuu edelleen: artikkelit ovat tiiviitä ja erikoistuneita, kirja taas enemmän hakuteostyyppinen.

Tämän tekstin tarkoitus on olla matemaattinen vastine Knutsonin tekstille [9] määritelmiseen, lauseineen ja todistuksineen. Tekstin ymmärtämiseen ei tarvita jongleeraustaitoja. Matemaattisista käsitteistä tunnetuiksi oletetaan

- joukon käsite ja joukkojen peruslaskutoimitukset (yhdiste, leikkaus, erotus, tulojoukko)
- funktion käsite (myös käsitteet injektio, surjektio, bijektio ja yhdistetty funktio)
- binomikerroin  $\binom{n}{k}$  ja sen kombinatorinen tulkinta
- kokonaislukujen yhteen-, kerto- ja jakolasku sekä summausmerkinnän  $\sum$  käyttö.

Näitä voi opiskella esimerkiksi teoksesta [10]. Muut tarvittavat matemaattiset käsitteet esitellään lyhyesti tekstin liitteissä.

---

<sup>1</sup>Jonomerkinnän keksivät toisistaan riippumatta Tiemannin (Caltech) lisäksi myös Paul Klimek (Santa Cruz) ja Mike Day (Cambridge), kaikki noin vuonna 1985.

<sup>2</sup><http://math.berkeley.edu/~allenk>

Lukujen 1-4 pääasiallisena lähteenä (Knutsonin tekstin lisäksi) on ollut artikkeli [3]. Luvun 5 tuloksista suuri kunnia kuuluu Jack Boycellen<sup>3</sup>, tilakäsitteen isälle, joka myös kertoi minulle todistuksen lauseeseen 5.10. Luvut 6 ja 7 olen parsinut kasaan käyttäen tekstejä [12], [5] ja [8].

Vaikka Knutson itse ei valitettavasti ole kirjoittanut matemaattista versiota tekstistään, on hän ystävineen tehnyt mainion Java-kuviaanimaattorin, joka toimii internet-selaimella osoitteessa

<http://www.math.jyu.fi/~havarpan/juggler/juggler.html> (300k).

Animaattorin käyttäminen tekstin esimerkkien havainnollistamiseksi on suositeltavaa.

Jongleerauksesta yleensä lisää osoitteissa <http://www.jugglingdb.com> ja <http://www.juggling.org>.

Huomautettakoon vielä, että jonglööri todellakin jongleeraa, tarkistin asian Suomen kielitoimistosta 12.2.04.

**Kiitokset.** Haluan kiittää kaikkia alan pioneereja, erityisesti Bruce Tiemannia, Allen Knutsonia ja Jack Boycea; ilman heitä tekstin kirjoittaminen olisi ollut mahdotonta. Myös työ, jonka Buhler, Eisenbud, Graham ja Wright tekivät artikkelin [3] kirjoittamisessa, on ollut tekstin kannalta ratkaisevaa. Suuret kiitokset kuuluvat niin ikään professori Eero Saksmanille ja FT Taneli Huuskoselle tekstin esitarkistamisesta ja monista parannusehdotuksista, sekä lopuksi Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitokselle vapaamielisestä ilmapiiristä.

Jyväskylässä 9.9.2004

Harri Varpanen

---

<sup>3</sup><http://www.sonic.net/~boyce/juggling.html>

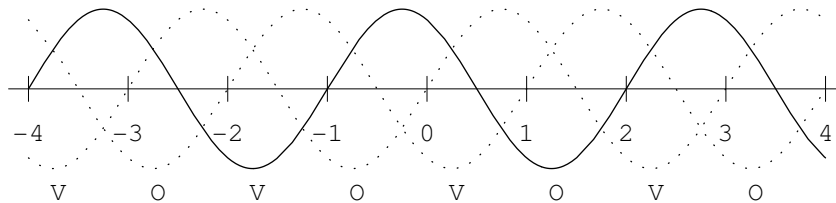
## LUKU 1

### Siteswap-kuviot

**1.1. Yleistä.** Jongleerausta on monenlaista. Jo erilaisia jongleerausvälineitä on liuta, ja yhdellä välineellä on usein olemassa erilaisia jongleeraustapoja. Esimerkiksi palloilla voi harrastaa ns. kontaktijongleerausta, jossa palloja ei heitellä ilmaan, vaan niitä vieritellään pitkin käsiä ja vartaloa. Suosittua on myös ns. freestylejongleeraus, jossa palloja ikään kuin “roiskitaan miten sattuu” ilman helposti havaittavaa rytmiä tai säännönmukaisuutta. Yleisin jongleerauksen muoto on kuitenkin klassinen jongleeraus, jossa palloilla (tai muilla esineillä) heitellään rytmisesti erilaisia jaksollisia kuvioita.

Tässä tekstissä tarkastellaan klassisen jongleerauksen matemaattista mallia, sillä nimenomaan rytmi ja jaksollisuus mahdollistavat johdonmukaisen teorian rakentamisen. Heiteltäviä esineitä kutsutaan aina palloiksi, vaikka ne voivat yhtä hyvin olla mitä tahansa esineitä.

**1.2. Kaskadi.** Tunnetuin klassinen jongleerauskuvio on makaavaa kahdeksikkoa muistuttava kolmen pallon peruskuvio eli *kaskadi*, jossa palloja heitetään kädestä toiseen vuorotellen oikealla ja vasemmalta kädellä. Kuviota voi havainnollistaa koordinaatistossa, jonka vaak akselilla on rytmitetty aika (rytmin varsinaiseen nopeuteen ei kiinnitetä huomiota) ja pysty akselilla pallon korkeus:



Kuva 1. Kaskadi.

Kuvassa yhden pallon rata on vahvistettu, kahden muun pallon radat on merkitty katkoviivoin. Vaaka-akseli merkitsee korkeutta, jossa pallot heitetään ilmaan ja otetaan kiinni. Negatiivinen korkeus siis ilmaisee sitä, että palloa pidetään kädessä ja positiivinen puolestaan sitä, että pallo on ilmassa. Pallon ollessa kädessä näkyy radan alapuolella kirjain

O tai V sen mukaan, kummassa kädessä pallo on. Korkeusakseli on jätetty epäolennaisena pois kuvasta.

**Esimerkki.** Kuvasta 1 voi lukea, että tahdilla  $t = -1$  vasen käsi heittää ilmaan pallon, jonka oikea käsi ottaa kiinni tahdilla  $t = 0,5$  ja heittää edelleen ilmaan tahdilla  $t = 2$ .

**1.3. Määritelmä.** *Viivähdyssuhde* (eng. *dwell ratio*) ilmaisee, kuinka suuren osan kahden peräkkäisen heiton välisestä ajasta pallo pysyy kädessä. Täsmällisemmin ilmaistuna:

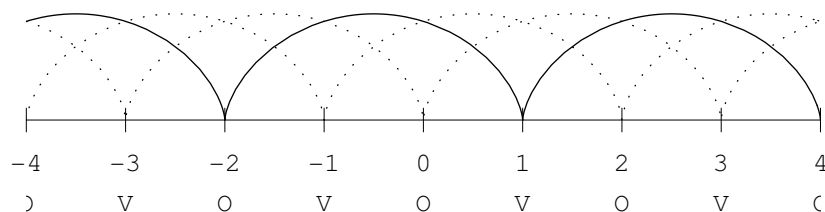
Oletetaan, että tietty pallo heitetään tahdilla  $t_0$ , otetaan kiinni tahdilla  $t_1$  ja heitetään jälleen tahdilla  $t_2$ . Tällöin hetkillä  $t_0$  ja  $t_2$  tapahtuvien heittojen välinen viivähdyssuhde on luku  $(t_2 - t_1)/(t_2 - t_0)$ .

**Esimerkki.** Kuvassa 1 saman pallon kahden peräkkäisen heiton välinen aika on aina 3 tahtia, josta puolet eli 1,5 tahtia pallo on kädessä. Viivähdyssuhde on siis koko ajan  $1/2$ . Tämä vastaa melko hätäistä heittelyä, sillä luonnollinen viivähdyssuhde kolmen pallon kaskadille on hieman alle  $2/3$ .<sup>1</sup> Kuvion monimutkaistuessa tai pallojen määrän lisääntyessä viivähdyssuhde pienenee, koska tällöin kädelle jää vähemmän aikaa pallon kiinnipitämiseen.

Ideaalinen jonglööri olisi äärettömän nopea. Tällöin pallo pysyisi kädessä vain infinitesimaalisen pienen ajan eli viivähdyssuhde olisi nolla.

**1.4. Sopimus.** Mallimme jonglööri on ideaalinen.

Palloa ei siis pidetä kädessä hetkeäkään, vaan se otetaan kiinni ja heitetään uudelleen samalla tahdinlyönnillä. Tämä ei muuta mitään olennaista kuvion kannalta (vrt. kolmen tennispallon juggleeraus tennismailat käsissä), mutta mahdollistaa sen, että mallissa voidaan heitellä mielivaltaisen monimutkaisia kuvioita mielivaltaisen monella pallolla. Kuvasta 1 tulee näin ollen seuraavanlainen:



Kuva 2. Ideaalinen kaskadi.

<sup>1</sup> $n$ :n pallon kaskadissa (kahdella kädellä) viivähdyssuhteen on oltava alle  $2/n$ , jotta käsi ehtisi heittää edellisen pallon ilmaan ennen seuraavan kiinniottamista. Käytännön viivähdyssuhteista enemmän teoksessa [1, luku 3].



Seuraava, ns. *siteswap-rajoitus* sulkee pois huomattavan määrän kuvioita, mutta siitä luovutaan luvuissa 6 ja 7.

**1.5. Rajoitus.** Mallissamme sallitaan ainoastaan yhden pallon heittäminen kerrallaan.

Toisin sanoen on kiellettyä heittää yhdestä kädestä kaksi palloa kerrallaan (*multiplex*-kuviot) tai kahdesta kädestä pallo samanaikaisesti (*synchro*-kuviot). Rajoituksen 1.5 mukaisia kuvioita kutsutaan *siteswap*-kuvioiksi.<sup>2</sup>

**1.6. Sopimus.** Joka toisella tahdilla heittää oikea käsi, joka toisella vasen.

Tarkalleen ottaen tässä sovitaan, että heittäminen tapahtuu kahdella kädellä (oikea ja vasen) ja että kädet heittelevät palloja vuorotahdein. Siteswap-rajoitus nimittäin tarkoittaa myös sitä, ettei käsien määrällä ole merkitystä: koska vain yhden pallon heittäminen kerrallaan on sallittua, voi tuon heiton tehdä koko ajan myös yksi ja sama käsi. Kolmen pallon kaskadia voi siis heittää yhdellä kädellä tai neljälläkin kädellä, jos heittäminen osallistuu vähintään kaksi henkilöä. Kuva 2 ei tästä kuitenkaan kirjaimia O ja V lukuunottamatta muuttuisi millään tavalla. Siispä sovitaan, että mallissamme yksinäinen, kaksikäsinen, ideaalinen jonglööri heittelee enintään yhtä palloa kerrallaan, vuorotahdein oikealla ja vasemmalla kädellä.

Itse asiassa voimme nyt kuvata myös yhden käden kuvioita:

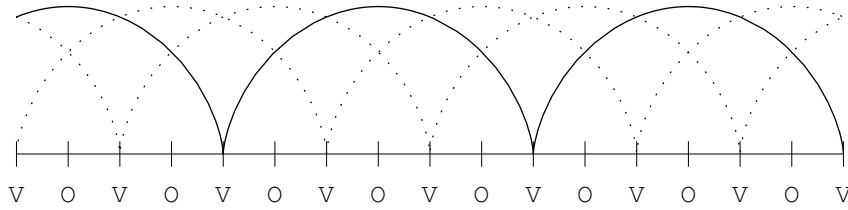
**1.7. Sopimus.** Tyhjät heitot sallitaan.

Tämä tarkoittaa sitä, että käden ei ole jokaisella tahdilla pakko heittää palloa, vaan käsi voi heittäessään olla myös tyhjä. Siteswap-rajoitus kieltää heittämisestä millään tahdilla useampaa kuin yhtä palloa kerrallaan, muttei toisaalta velvoita heittämään tuota yhtä palloa joka tahdilla. Sopimus 1.7 täsmentää asian.

**Esimerkki.** Kuvassa 3 heitetään kolmea palloa pelkästään vasemmalla kädellä, oikea käsi heittää koko ajan tyhjää:

---

<sup>2</sup>Nimen siteswap alkuperästä lisää kohdassa 2.11.



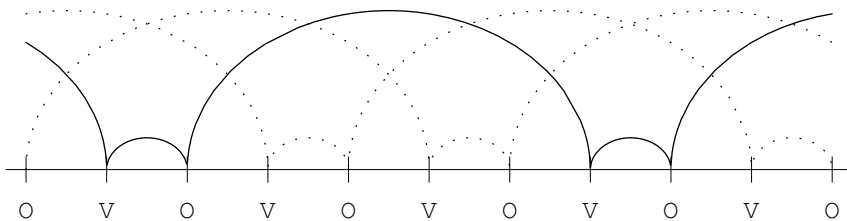
Kuva 3. Yksikätkäinen kaskadi.

Heittotahtien numerot on jätetty epäolennaisina pois kuvasta.

Lopuksi sovimme vielä, ettei käsien paikkaan ja asentoon kiinnitetä huomiota, vaikka oikeasti samaa kuviota voi heitellä usealla eri tyylillä. Palloja voi heittää muun muassa selän takaa (backcross), kämmenet alaspäin (clawing) ja käsiä vuoronperään ristien (Mills mess). Näitä malli ei kata, vaan ne on ilmaistava erikseen. (Usein puhutaan kuviosta “Mills mess”, kun tarkoitetaan kuviota “kaskadi Mills mess -heitoilla”.)

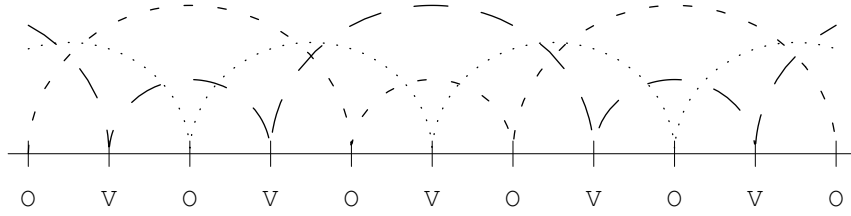
Myöskään kuvion aloitukseen tai lopetukseen ei kiinnitetä huomiota, vaan oletetaan, että kuviota on heitelty ja tullaan heittelemään ikuisesti.

**1.8. Muita kuvioita.** Tähän asti esimerkkinä siteswap-kuviosta on ollut ainoastaan kolmen pallon kaskadi. Toinen yleinen kolmen pallon siteswap-kuvio on *suihku* (tässä oikeakätinen), jossa oikea käsi heittää pallot korkeina vasempaan käteen ja vasen käsi ainoastaan syöttää pallot pikaisesti takaisin oikeaan käteen. Koordinaatistoon piirretty kuva suihkusta näyttää seuraavalta:



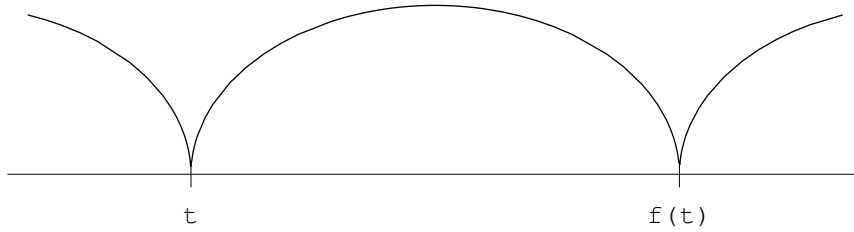
Kuva 4. Suihku.

Sekä suihkussa että kaskadissa kunkin pallon radat ovat keskenään samanlaisia, mutta näin ei tarvitse olla. Tästä esimerkkinä on niin ikään suosittu kolmen pallon siteswap-kuvio “neljäkaksikolme”:



Kuva 5. Neljäkaksikolme.

Useimpia kuviota on vaikea kuvailla sanoin, mutta koordinaatistoon voidaan verrattaen helposti piirtää kuva mistä tahansa siteswap-kuvio-osta. Tällaista kuviota voidaan kätevästi kuvata bijektiivisellä funktiolla  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ :



Kuva 6. Funktion idea.

**1.9. Määritelmä.** *Siteswap-kuvio* on bijektio  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , jolle  $f(t) \geq t$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ . Tässä  $\mathbf{Z}$  tulkitaan tahdinlyönneiksi ja kuvaus  $t_0 \mapsto t_1$  tulkitaan siten, että tahdilla  $t_0$  heitetty pallo heitetään seuraavan kerran tahdilla  $t_1$ . Poikkeuksena on tapaus  $t_0 \mapsto t_0$ , joka tulkitaan tyhjäksi heitoksi eli *kuvitteellisen pallon* heitoksi.

Lisäehto  $f(t) \geq t$  estää heittämästä palloja ajassa taaksepäin. Bijektiivisyyteen palataan esimerkin jälkeen.

**Esimerkki.** Kolmen pallon kaskadi (vrt. kuva 2) on funktio  $t \mapsto t + 3$  ja kolmen pallon suihku (vrt. kuva 4) on funktio

$$t \mapsto \begin{cases} t + 5, & t \text{ pariton} \\ t + 1, & t \text{ parillinen,} \end{cases}$$

missä parittoman ja parillisen järjestyksellä on merkitystä vain käti-syyden kannalta.<sup>3</sup> Kuvan 3 kuvio puolestaan on funktio

$$t \mapsto \begin{cases} t + 6, & t \text{ pariton} \\ t, & t \text{ parillinen.} \end{cases}$$

Funktion muodostaminen kuvasta 5 jätetään harjoitustehtäväksi.

<sup>3</sup>Emme ole missään vaiheessa sopineet, heittääkö parillisilla tahdeilla oikea vai vasen käsi. Tätä emme myöskään sovi, asialla ei ole mitään merkitystä.

**Bijektiivisyydestä.** Siteswap-rajoitus vaatii, että eri pallojen heittotahdit ovat erillisiä. Jos tällainen kuvio tunnetaan käytännössä, voidaan eri pallojen heittotahdit luetella ja tällöin funktio on helppo muodostaa. Jotta heittotahdit olisivat erillisiä, on funktion oltava bijektio. Määritelmä 1.9 ei kuitenkaan olisi järkevä, ellei sama toimisi kääntäen, ts. ellei jokaista määritelmän mukaista bijektiota voitaisi tulkita jongleerattavaksi kuvioksi.

**1.10. Määritelmä.** Jos  $f$  on siteswap-kuvio, niin tahdilla  $t$  heitettävän pallon heittotahdien joukkoa kutsutaan ko. pallon *radaksi* ja merkitään

$$O_t := \{\dots f^{-2}(t), f^{-1}(t), t, f(t), f^2(t), \dots\} \subset \mathbf{Z}.$$

**Huomio.** Jos tahdilla  $t$  heitetään kuvitteellinen pallo, niin  $f^m(t) = t$  kaikilla  $m \in \mathbf{Z}$  ja  $O_t = \{t\}$ .

**1.11. Lause.** Jos  $f$  on siteswap-kuvio, niin eri pallojen radat ovat erillisiä.

**TODISTUS.** Olkoot  $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}$  kahden eri pallon heittotahteja, toisin sanoen  $t_1 \notin O_{t_2}$  (ja  $t_2 \notin O_{t_1}$ ). Elleivät radat  $O_{t_1}$  ja  $O_{t_2}$  olisi erillisiä, niin niillä olisi yhteinen tahti  $t_0 \in O_{t_1} \cap O_{t_2}$ . Tällöin olisi toisaalta  $t_0 = f^m(t_1)$  jollekin  $m \in \mathbf{Z}$  ja toisaalta  $t_0 = f^n(t_2)$  jollekin  $n \in \mathbf{Z}$ . Nyt olisi siis  $f^m(t_1) = f^n(t_2)$  eli  $t_1 = f^{n-m}(t_2)$ . Tämä kuitenkin tarkoittaisi, että  $t_1 \in O_{t_2}$ , mikä on ristiriita.  $\square$

Jokainen bijektio  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  siis jakaa joukon  $\mathbf{Z}$  erillisiin osajoukkoihin, jotka voidaan tulkita eri pallojen heittotahdeiksi. Määritelmä 1.9 on näin ollen järkevä.

Määritelmän 1.9 käyttäminen sellaisenaan on työlästä. Asiat helpottuvat, kun otetaan käyttöön etäisyysfunktion käsite.

**1.12. Määritelmä.** Olkoon  $f$  siteswap-kuvio. Tällöin  $f$ :n *etäisyysfunktio* on funktio  $d_f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ ,  $d_f(t) = f(t) - t$ .

Jatkossa merkinnän  $d_f(t)$  sijasta käytetään merkintää  $d(t)$ , kun sekaannuksen vaaraa ei ole.

Etäisyysfunktion arvo  $d(t)$  kertoo kuinka monen tahdin päästä tahdilla  $t$  heitetty pallo heitetään seuraavan kerran. Näin ollen luku  $d(t)$  on sitä suurempi, mitä korkeampi heitto tehdään tahdilla  $t$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Etäisyysfunktion arvo on suoraan verrannollinen etäisyysfunktion arvon neilijouureen, asiasta tarkemmin teoksessa [1, luku 3].

Etäisyysfunktio määrää siteswap-kuvion yksikäsitteisesti, sillä  $f(t) = d(t) + t$ . Sen avulla kuvio voidaan esittää päättymättömänä jonona tahteja, jossa kunkin tahdin kohdalla näkyy etäisyysfunktion arvo.

**Esimerkki.** Kolmen pallon kaskadille etäisyysfunktio on  $d(t) = 3$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ , joten kaskadi voidaan esittää muodossa

$$\dots 3, 3, 3, 3, 3, 3 \dots$$

Vastaava jono suihkulle on

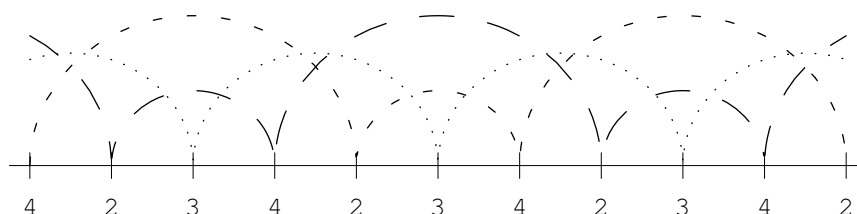
$$\dots 5, 1, 5, 1, 5, 1 \dots$$

yhden käden kaskadille

$$\dots 6, 0, 6, 0, 6, 0 \dots$$

ja lopuksi kuviolle “neljäkaksikolme”

$$\dots 4, 2, 3, 4, 2, 3 \dots$$



Kuva 7. Kuvio 423.

Kaikki nämä jonot ovat jaksollisia, joten riittää antaa niistä vain yksi jakso. Pilkkuja ei myöskään tarvita, kun numerot ovat pienempiä kuin 10; jatkossa näin oletetaan. Edelliset kuviot ovat siis lyhyesti: 3, 51, 60 ja 423.

Näin heittotahteja vastaavat numerot, jotka puolestaan vastaavat erilaisia heittoja. Mitä korkeampi heitto, sitä suurempi numero. Huomataan myös, että sopimuksen 1.6 nojalla parillinen numero heitetään samaan käteen ja pariton numero toiseen käteen. Poikkeuksena on nolla, jolloin käsi on tyhjä eikä käytännössä tee mitään.

Käytännössä myös ykkönen ja kakkonen ovat poikkeuksellisia. Oikeaoppinen ykkönen olisi nopea, lähes vaakasuora heitto kädestä toiseen, mutta viivähdysajan ansiosta pallon voi heittämisen sijasta yksinkertaisesti laittaa kädestä toiseen. Kakkonen puolestaan olisi matala heitto samaan käteen, mutta käytännössä palloa useimmiten vain pidetään kädessä seuraavan tahdin yli.

Jatkossa tutkimme mm. seuraavia asioita:

- Millaiset lukujonot esittävät siteswap-kuvioita?

- Miten tällaisia jonoja voidaan generoida ja analysoida?
- Kuinka monta kuviota on olemassa (tietyin rajoituksin)?
- Miten kuviosta voidaan siirtyä toiseen?
- Miten tämä kaikki yleistyy, jos poistamme siteswap-rajoituksen 1.5?

### **Harjoitustehtäviä**

1. Miksi jonoa 432 ei voi tulkita jogleerauskuvioksi?
2. Piirrä koordinaatistoon kuvio 453. Montako palloa kuviossa on?
3. Katso animaattorilla kuvioita 441, 423, 450 ja 453. Näetkö numerot? (Huomaa, että kakkonen pidetään kädessä ja että nollalla saa tapahtua kiinniotto. Helpottaa myös tietää, että animaattorissa kiinniotot tapahtuvat tahdinlyönneillä.)

## Siteswap-kuvioiden generoiminen

Ryhdyimme nyt tutkimaan kysymystä siitä, millaiset äärelliset luonnollisten lukujen jonot vastaavat jaksollisia siteswap-kuvioita. Vastaus esitetään lauseessa 2.7.

**2.1. Määritelmä.** Siteswap-kuvio  $f$  on *jaksollinen*, jos on olemassa  $n \in \mathbf{Z}_+$  siten, että  $f(t+n) = f(t) + n$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ , tai yhtäpitävästi,  $d(t+n) = d(t)$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ . Pienin tällainen luku  $n$  on kuvion *jaksonpituus*. Kuviota, jonka jaksonpituus on  $n$ , sanotaan  *$n$ -jaksolliseksi*.

Jos kuvio on  $n$ -jaksollinen, niin myös mille tahansa luvun  $n$  monikeralle  $k$  pätee  $d(t+k) = d(t)$ . Toisaalta, jos  $d(t+n) = d(t)$  jollekin  $n \in \mathbf{Z}_+$ , niin kuvion jaksonpituus on luvun  $n$  tekijä. Todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

**2.2. Määritelmä.** Kokonaislukujen jäännösluokkia modulo  $n$  (ks. liite B) sanotaan  $n$ -jaksollisen kuvion *vaiheiksi* ja merkitään

$$\mathbf{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}.$$

Jatkossa merkinnän  $[t]_n$  sijasta käytetään merkintää  $[t]$ , kun sekaannuksen vaaraa ei ole.

**2.3. Määritelmä.** Olkoon  $f$   $n$ -jaksollinen siteswap.  $f$ :n *vaihefunktio* on kuvaus

$$f_n : \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_n, \quad f_n([t]) = [f(t)]_n,$$

missä  $t \in \mathbf{Z}$  on mielivaltainen vaiheen  $[t]$  edustaja.

Vaihefunktio on hyvinmääritelty (ks. B.11); todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

**2.4. Määritelmä.** Äärellinen luonnollisten lukujen jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  esittää siteswap-kuviota, mikäli funktio

$$f(t) = \begin{cases} t + a_0, & t \equiv_n 0 \\ t + a_1, & t \equiv_n 1 \\ \vdots \\ t + a_{n-1}, & t \equiv_n n - 1 \end{cases}$$

on siteswap-kuvio (Määritelmä 1.9). Tällöin etäisyysfunktio on

$$d(t) = f(t) - t = \begin{cases} a_0, & t \equiv_n 0 \\ a_1, & t \equiv_n 1 \\ \vdots \\ a_{n-1}, & t \equiv_n n - 1 \end{cases}$$

ja vaihefunktio  $f_n$  on kuvaus

$$\begin{aligned} [0] &\mapsto [a_0 + 0] \\ [1] &\mapsto [a_1 + 1] \\ &\vdots \\ [n - 1] &\mapsto [a_{n-1} + (n - 1)]. \end{aligned}$$

Kuvio on jaksollinen, sillä  $t+n \equiv_n t$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$  ja edelleen  $d(t+n) = d(t)$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ . Kuvion ei kuitenkaan tarvitse olla  $n$ -jaksollinen, mikäli jonossa esiintyy toistoa. Esimerkiksi jono 4242 esittää kuviota, jonka jaksonpituus on 2.

**2.5. Esimerkki.** Uskotaan toistaiseksi, että jono 453 esittää 3-jaksollista siteswap-kuviota. Kuvion vaiheet ovat tällöin  $[0]_3, [1]_3$  ja  $[2]_3$ . Koska vastaava funktio on

$$f(t) = \begin{cases} t + 4, & t \equiv 0 \\ t + 5, & t \equiv 1 \\ t + 3, & t \equiv 2, \end{cases}$$

niin vaihefunktio  $f_n$  on kuvaus

$$\begin{aligned} [0] &\mapsto [0 + 4] = [1] \\ [1] &\mapsto [1 + 5] = [0] \\ [2] &\mapsto [2 + 3] = [2]. \end{aligned}$$

Tämä on bijektio joukolta  $\mathbf{Z}_3$  itselleen.



**2.6. Lemma.** Jos  $f$  on  $n$ -jaksollinen siteswap, niin vaihefunktio  $f_n$  on bijektio joukolta  $\mathbf{Z}_n$  itselleen.

TODISTUS. Osoitetaan ensin surjektivisuus, sitten injektivisuus.<sup>1</sup> Olkoon  $[t_1] \in \mathbf{Z}_n$ . Halutaan  $[t_0] \in \mathbf{Z}_n$ , jolle  $f_n([t_0]) = [t_1]$ . Tällaiseksi kelpaa  $[f^{-1}(t_1)]$ , missä  $t_1$  on mielivaltainen vaiheen  $[t_1]$  edustaja, sillä

$$f_n([f^{-1}(t_1)]) = [f(f^{-1}(t_1))] = [t_1].$$

Olkoon sitten  $f_n([t_1]) = f_n([t_2])$  (ts.  $[f(t_1)] = [f(t_2)]$ ); halutaan  $[t_1] = [t_2]$ . Koska  $[f(t_1)] = [f(t_2)]$ , niin  $f(t_1) + kn = f(t_2)$  jollekin  $k \in \mathbf{Z}$ . Koska  $f$  on  $n$ -jaksollinen, niin  $f(t_1 + kn) = f(t_2)$ , ja koska  $f$  on injektio, niin  $t_1 + kn = t_2$ , ts.  $[t_1] = [t_2]$ .  $\square$

## 2.7. Lause (permutaatiotesti).

- (i) Jos lukujono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  esittää  $n$ -jaksollista siteswap-kuviota, niin

$$\{[a_t + t] : t = 0, 1, \dots, n-1\} = \mathbf{Z}_n.$$

- (ii) Jos lukujonolle  $a_0, \dots, a_{n-1}$  pätee

$$\{[a_t + t] : t = 0, 1, \dots, n-1\} = \mathbf{Z}_n,$$

niin lukujono esittää jaksollista siteswap-kuviota, missä jaksonpituus on luvun  $n$  tekijä.

TODISTUS. (i) Oletetaan, että jono  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  esittää  $n$ -jaksollista siteswap-kuviota  $f$ , ts.  $a_t = d(t) = f(t) - t$  kaikilla  $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Tällöin siis  $f(t) = a_t + t$  ja edelleen

$$\begin{aligned} & \{[a_t + t] : t = 0, 1, \dots, n-1\} \\ &= \{[f(t)] : t = 0, 1, \dots, n-1\} \\ &= f_n(\mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Lemmasta 2.6.

- (ii) Oletetaan sitten, että jonolle  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  pätee

$$\{[a_t + t] : t = 0, 1, \dots, n-1\} = \mathbf{Z}_n.$$

Väite on, että funktio

$$f(t) = \begin{cases} t + a_0, & t \equiv_n 0, \\ t + a_1, & t \equiv_n 1, \\ \vdots \\ t + a_{n-1}, & t \equiv_n n-1, \end{cases}$$

<sup>1</sup>Riittäisi osoittaa näistä toinen, ks. [11, luku 1.3].

on jaksollinen siteswap. Selvästi  $f(t) \geq t$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ , koska luvut  $a_i$  ovat luonnollisia lukuja. Selvästi myös  $f(t+n) = f(t)+n$  kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$ , joten  $f$  on jaksollinen ja jaksonpituus on luvun  $n$  tekijä. Todistetaan vielä  $f$ :n surjektiivisuus ja injektiiivisyys.

Olkoon  $t_1 \in \mathbf{Z}$ ; halutaan  $t_0 \in \mathbf{Z}$  siten, että  $f(t_0) = t_1$ . Valitaan (oletuksen nojalla)  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  siten, että  $a_i + i \equiv_n t_1$  ja asetetaan  $t_0 = t_1 - a_i$ . Tällöin, koska  $t_1 - a_i \equiv_n i$ , niin

$$f(t_0) = f(t_1 - a_i) = t_1 - a_i + a_i = t_1.$$

Siis  $f$  on surjektio.

Jos nyt  $f(t_1) = f(t_2)$ , niin  $t_1 + a_i = t_2 + a_j$ , missä  $t_1 \equiv_n i$ ,  $t_2 \equiv_n j$  ja  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Silloin  $t_1 + a_i \equiv_n t_2 + a_j$  ja edelleen  $i + a_i \equiv_n j + a_j$ , sillä  $t_1 \equiv_n i$  ja  $t_2 \equiv_n j$ . Oletuksen nojalla  $i = j$ , joten myös  $a_i = a_j$  ja edelleen  $t_1 = t_2$ . Siis  $f$  on injektio.  $\square$

**Esimerkki.** Jono  $a_0a_1a_2 = 435$  ei esitä siteswap-kuviota, sillä

$$\{[a_t + t]_3 : t = 0, 1, 2\} = \{[4 + 0]_3, [3 + 1]_3, [5 + 2]_3\} = \{[1], [2]\} \neq \mathbf{Z}_3.$$

**Esimerkki.** Jono  $a_0a_1a_2 = 453$  esittää siteswap-kuviota, sillä

$$\{[a_t + t]_3 : t = 0, 1, 2\} = \{[4 + 0]_3, [5 + 1]_3, [3 + 2]_3\} = \{[1], [0], [2]\} = \mathbf{Z}_3.$$

Lauseen 2.7 avulla voidaan näin suhteellisen helposti nähdä, esittääkö annettu lukujono siteswap-kuviota. Johdamme vielä lauseelle seurauksia, joiden avulla kuvioita on helppo myös generoida.

**2.8. Seuraus.** Vakiojono  $a, a, \dots, a$ , jonka pituus on  $n$ , esittää jaksollista siteswap-kuviota kaikilla  $a \in \mathbf{N}$ ,  $n \in \mathbf{Z}_+$ .

**TODISTUS.** Kaikilla  $a \in \mathbf{N}$  pätee

$$\{[a + t]_n : t = 0, \dots, n-1\} = \{[t]_n : t = 0, \dots, n-1\} = \mathbf{Z}_n.$$

$\square$

**Esimerkki.** Siteswap-kuvioita ovat mm. jonot 2, 33, 444 ja 5555. Luvussa 3 todistetaan, että vakiokuviossa  $a, a, \dots, a$  pallojen lukumäärä on  $a$ .

**2.9. Seuraus.** Olkoon  $a_0, \dots, a_{n-1}$  siteswap-kuvio, ja olkoon  $a_k \geq 1$  jollekin  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Tehdään kuviolle ns. *vaihtomuunnos vaiheille  $[k]$  ja  $[k+1]$* : valitaan vaiheelle  $[k+1]$  edustaja  $l$  joukosta  $\{0, \dots, n-1\}$

ja asetetaan

$$\begin{aligned}b_l &= a_k - 1, \\b_k &= a_l + 1, \\b_i &= a_i, \text{ kun } i \neq k, l.\end{aligned}$$

Tällöin  $b_0, \dots, b_{n-1}$  on siteswap.

TODISTUS. Riittää osoittaa, että  $[b_l + l] = [a_k + k]$  ja  $[b_k + k] = [a_l + l]$ . Näin on, sillä

$$\begin{aligned}[b_l + l] &= [(a_k - 1) + (k + 1)] = [a_k + k] \text{ ja} \\[b_k + k] &= [(a_l + 1) + k] = [a_l + (k + 1)] = [a_l + l].\end{aligned}$$

□

**Esimerkki.** Jono  $a_0a_1a_2 = 333$  on Seurauksen 2.8 perusteella siteswap-kuvio. Valitaan  $k = 0$  ( $a_0 = 3 \geq 1$ ) ja asetetaan  $b_1 = a_0 - 1 = 2$ ,  $b_0 = a_1 + 1 = 4$  ja  $b_3 = a_3 = 3$ . Saadaan kuvio 423. Kun tässä edelleen valitaan  $k = 1$ , saadaan kuvio 441. Luvussa 3 todistetaan, että vaihtomuunnos ei muuta pallojen lukumäärää.

**Huomio.** Suorittamalla sama vaihtomuunnos kahdesti peräkkäin päädytään takaisin alkuperäiseen kuvioon.

Seuraavaksi todistetaan, että kaikki siteswap-kuviot voidaan generoida vakiojonoista vaihtomuunnoksilla. Tätä varten tarvitaan

**2.10. Lemma.** Jos ei-vakiojono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  esittää siteswap-kuviota, niin jonosta löytyy maksimaalinen alkio  $a_i$  siten, että  $a_i - a_{i+1} \geq 2$ . (Jos tässä  $i = n - 1$ , niin  $a_{i+1} = a_0$ .)

TODISTUS. Jos olisi  $a_i - a_{i+1} = 0$  kaikille maksimaalisille alkiolle  $a_i$ , niin selvästikin jono olisi vakiojono. Jos taas edes yhdelle maksimaaliselle alkiolle olisi  $a_i - a_{i+1} = 1$ , niin olisi  $a_i = a_{i+1} + 1$  ja edelleen

$$[a_i + i] = [a_{i+1} + (i + 1)],$$

eli Lauseen 2.7 nojalla jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  ei esittäisi siteswap-kuviota.

□

**2.11. Lause.** Mikä tahansa siteswap-kuvio voidaan generoida vakiojonosta lähtien käyttämällä pelkästään vaihtomuunnosta.<sup>2</sup>

TODISTUS. Olkoon  $a_0, \dots, a_{n-1}$  mielivaltainen siteswap-kuvio. Jos jono on vakiojono, ollaan valmiita. Muussa tapauksessa Lemman 2.10 nojalla löytyy maksimaalinen alkio  $a_i$  siten, että  $a_i - a_{i+1} \geq 2$ . Tehdään

---

<sup>2</sup>Termi siteswap juontaa juurensa tästä lauseesta.

vaihtomuutos vaiheille  $[i]$  ja  $[i + 1]$ ; tämä pienentää lukua  $a_i$  yhdellä ja suurentaa lukua  $a_{i+1}$  yhdellä. Toistetaan prosessia, kunnes saatu jono on vakiojono<sup>3</sup>. Sen jälkeen edetään lopusta alkuun, jolloin vakiojonosta saadaan alkuperäinen jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$ .  $\square$

**Esimerkki.** Jono  $a_0a_1a_2 = 531$  on siteswap, sillä

$$\{[a_t + t]_3 : t = 0, 1, 2\} = \{[5 + 0]_3, [3 + 1]_3, [1 + 2]_3\} = \{[2], [1], [0]\} = \mathbf{Z}_3.$$

Tässä  $a_0 = 5$  on maksimaalinen alkio ja  $a_0 - a_1 = 5 - 3 = 2$ . Kun vaiheille  $[0]$  ja  $[1]$  tehdään vaihtomuunnos, saadaan jono  $b_0b_1b_2 = 441$ . Tässä  $b_1 = 4$  on maksimaalinen alkio ja  $b_1 - b_2 = 4 - 1 = 3$ . Kun vaiheille  $[1]$  ja  $[2]$  tehdään vaihtomuunnos, saadaan jono  $c_0c_1c_2 = 423$ . Tässä  $c_0 = 4$  on maksimaalinen alkio ja  $c_0 - c_1 = 4 - 2 = 2$ . Tehdään vaihtomuunnos vaiheille  $[0]$  ja  $[1]$ , jolloin päädytään vakiojonoon 333. Nyt, kun tähän jonoon tehdään edelliset vaihtomuunnokset kääntelyssä järjestyksessä, päädytään ensin jonoon 423, sitten jonoon 441 ja lopuksi jonoon 531.

Lopuksi todistamme Lauseelle 2.7 vielä kaksi käytännöllistä seurausta.

**2.12. Seuraus.** Olkoon  $a_0, \dots, a_{n-1}$  siteswap-kuvio ja  $0 \leq k \leq n - 1$ . Tehdään kuviolle ns. *lokaali muunnos* vaiheeseen  $[k]$ : asetetaan

$$\begin{aligned} b_k &= a_k + n, \\ b_i &= a_k, \text{ kun } i \neq k. \end{aligned}$$

Tällöin  $b_0, \dots, b_{n-1}$  on siteswap.

TODISTUS. Lauseen 2.7 nojalla selvä, sillä  $[b_k] = [a_k + n] = [a_k]$ .  $\square$

**Esimerkki.** Kuvioista  $a_0a_1a_2 = 423$  ( $n = 3$ ) saadaan lokaalilla muunnoksella kuvio 453, kun valitaan  $k = 1$ . Lokaalin muunnoksen voi tehdä myös vähentämällä (ts.  $b_k = a_k - n$ ), mikäli  $a_k \geq n$ . Näin kuvioista 453 saadaan edelleen kuvio 450, kun valitaan  $k = 2$ . Luvussa 3 todistetaan, että lokaali muunnos joko lisää tai vähentää pallojen lukumäärää yhdellä.

**2.13. Seuraus.** Olkoon  $a_0, \dots, a_{n-1}$  siteswap-kuvio. Tehdään kuviolle ns. *globaali muunnos* eli asetetaan  $b_i = a_i + 1$  kaikille  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ . Tällöin  $b_0, \dots, b_{n-1}$  on siteswap.

TODISTUS. Koska  $n \equiv_n 0$ , on  $\{[0], \dots, [n - 1]\} = \{[1], \dots, [n - 1], [n]\}$ . Väite seuraa lauseesta 2.7.  $\square$

<sup>3</sup>Prosessi ei voi olla loputon, sillä viimeistään  $n$ :n vaihtomuunnoksen jälkeen jokainen maksimaalinen luku on pienentynyt yhdellä.

**Esimerkki.** Kuviosta 441 saadaan globaalilla muunnoksella kuvio 552. Globaalin muunnoksen voi tehdä myös vähentämällä (ts.  $b_i = a_i - 1$ ), mikäli  $a_i \geq 1$  kaikilla  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ . Näin kuviosta 441 saadaan kuvio 330. Luvussa 3 todistetaan, että globaali muunnos joko lisää tai vähentää pallojen lukumäärää yhdellä.

Lopuksi mainitaan vielä triviaali tulos myöhempää viittausta varten:

**2.14. Seuraus.** Olkoon  $a_0, \dots, a_{n-1}$  siteswap-kuvio. Tehdään kuviolle ns. *syklinen muunnos* eli asetetaan

$$b_i = a_{i-1}, \text{ kun } i \in \{1, \dots, n - 1\}$$

$$b_0 = a_{n-1}.$$

Tällöin  $b_0, \dots, b_{n-1}$  on siteswap.

TODISTUS. Kuten seurauksessa 2.13. □

**Esimerkki.** Kuviosta 423 saadaan syklisillä muunnoksilla kuviot 342 ja 234.

### Harjoitustehtäviä

1. Esittääkö jono 55514 siteswap-kuviota? Entä jono 5514?
2. Generoi kuvio 61616 lähtien liikkeelle kuviosta 44444
  - a) käyttämällä lokaalia ja globaalia muunnosta
  - b) käyttämällä vaihtomuunnosta.
3. a) Olkoon  $f$   $n$ -jaksollinen siteswap ja olkoon  $k$  luvun  $n$  monikerta. Osoita, että  $d(t + k) = d(t)$ .  
 b) Olkoon  $f$  siteswap, jolle  $d_f(t + n) = d_f(t)$  jollekin  $n \in \mathbf{Z}_+$ . Osoita, että  $f$ :n jaksonpituus on luvun  $n$  tekijä.



## LUKU 3

### Pallojen lukumäärä ja radat siteswap-kuviossa

Jos annettuna on  $n$ -jaksollista siteswap-kuviota esittävä lukujono  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , niin mitä kuviosta voidaan sanoa? Ennen kaikkea, montako palloa kuviossa on ja millaisia ratoja eri pallot kulkevat?

Lemmassa 2.6 todistettiin, että  $n$ -jaksollisen siteswap-kuvion vaihefunktio  $f_n$  on bijektio joukolta  $\mathbf{Z}_n$  itselleen, ts. joukon  $\mathbf{Z}_n$  permutaatio (ks. liite C). Tällöin erityisesti jokaisella alkiolla  $[t] \in \mathbf{Z}_n$  on tietty kertaluku permutaatiossa  $f_n$ , missä kertaluku  $m$  saadaan selville permutaation sykliestyksestä (ks. liite C). Tämä tulkitaan siten, että vaiheella  $[t]$  heitetyn pallon heittotahtit käyvät läpi  $m$  eri vaihetta, ja vaiheet toistavat itseään  $m$  heiton jaksoissa.

**3.1. Määritelmä.** Jos  $f$  on  $n$ -jaksollinen siteswap-kuvio, niin tahdilla  $t$  heitettävän pallon heittotahtien vaiheiden joukkoa kutsutaan ko. pallon *vaiheradaksi* ja merkitään

$$[O_t] := \{[t]_n, [f(t)]_n, [f^2(t)]_n, \dots, [f^{m-1}(t)]_n\},$$

missä  $m$  on vaiheen  $[t]$  kertaluku permutaatiossa  $f_n$ .

Tahdilla  $t$  heitettävän pallon vaiherata on siis yhtä kuin alkion  $[t]$  sykli permutaatiossa  $f_n$ .

**Huomio.** Jos tahdilla  $t$  heitetään kuvitteellinen pallo, niin  $[f^k(t)] = [t]$  kaikilla  $k \in \mathbf{Z}$ , eli  $m = 0$  ja  $[O_t] = \{[t]\}$ .

**3.2. Lause.** Eri pallojen vaiheradat joko yhtyvät tai ovat erillisiä.

TODISTUS. Todistus on analoginen lauseen 1.11 todistuksen kanssa (ks. myös B.6 ja C.10).  $\square$

Tulevissa esimerkeissä jätetään usein merkintöjen yksinkertaistamiseksi vaiheiden hakasulkeet  $[ ]$  pois. Asiayhteydestä käy ilmi, että kyse on joukon  $\mathbf{Z}_n$  alkiosta, ei joukon  $\mathbf{Z}$  alkiosta.

**3.3. Esimerkki.** Esimerkissä 2.5 esitetty kuvion 453 vaihefunktio  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  saa sykliestyksessä muodon (10)(2) mistä nähdään, että kuviossa on kaksi vaiherataa,  $[O_0] = [O_1] = \{0, 1\}$  ja  $[O_2] = \{2\}$ . Vaiherataa  $[O_0]$

kiertävien pallojen heittotahdit kuuluvat vuorotellen vaiheisiin 0 ja 1, ja vaiherataa  $[O_2]$  kiertävien pallojen kaikki heittotahdit kuuluvat vaiheeseen 2.

**3.4. Määritelmä.** Vaiheradan  $[O_t]$  *pituus* kuviossa  $f$  on luku

$$l([O_t]) := f^m(t) - t \in \mathbf{N},$$

missä  $m$  on vaiheen  $[t]$  kertaluku permutaatioissa  $f_n$ .

Vaiheradan pituus kertoo montako tahtia pallolta kestää käydä vaiheratansa vaiheet kertaalleen läpi. Erityisesti, mikään vaiherataa  $[O_t]$  kiertävä pallo ei voi olla kahta kertaa samassa vaiheessa millään  $l([O_t])$ -pituisella välillä  $\{i, i+1, i+2, \dots, i+l([O_t]) - 1\} \subset \mathbf{Z}$ . Lisäksi, koska  $[f^m(t)] = [t]$ , niin vaiheradan pituus  $l([O_t])$  on jaksonpituuden  $n$  monikerta.

**Huomio.** Jos  $[O_t]$  on kuvitteellisen pallon vaiherata, niin  $f^m(t) = t$  ja  $l([O_t]) = 0$ .

Vaiheratojen pituudet on helppo laskea seuraavan lemmän avulla; esimerkki seuraa lemmän jälkeen.

**3.5. Lemma.** Esittäköön jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  siteswap-kuviota ja olkoon  $t \in \{0, \dots, n-1\}$ . Tällöin

$$l([O_t]) = \sum_{[i] \in [O_t]} a_i,$$

missä  $i$  on vaiheen  $[i]$  edustaja välillä  $\{0, \dots, n-1\}$ .

**TODISTUS.** Väite on melko selvä, sillä  $[i]$ -vaiheisella tahdilla pallo heitetään  $a_i$  tahdin päähän. Varsinainen todistuskin on suoraviivainen:

$$\begin{aligned} f^m(t) - t &= \sum_{k=0}^{m-1} f^{k+1}(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (f^{k+1}(t) - f^k(t)) = \sum_{k=0}^{m-1} (f(f^k(t)) - f^k(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} d(f^k(t)) = \sum_{[i] \in [O_t]} a_i. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että  $d(f^k(t)) = a_i$ , missä  $i$  on vaiheen  $[f^k(t)]$  edustaja välillä  $\{0, \dots, n-1\}$ .  $\square$



**3.6. Esimerkki.** Kuviossa 453 (Esimerkki 3.3) vaiheradan  $[O_1] = \{0, 1\}$  pituus on  $4 + 5 = 9$ . Näin ollen, jos vaiherataa  $[O_1]$  kiertävä pallo heitetään tahdilla  $t$  ja vaiheella  $[t] \in [O_1]$ , niin pallo heitetään vaiheella  $[t]$  seuraavan kerran tahdilla  $t + 9$ .

**3.7. Lemma.** Esittäköön jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$   $n$ -jaksollista siteswap-kuviota ja olkoon  $t \in \{0, \dots, n-1\}$ . Tällöin rataa  $[O_t]$  kiertävien pallojen lukumäärä on

$$\frac{1}{n}l([O_t]) = \frac{1}{n} \sum_{[i] \in [O_t]} a_i.$$

TODISTUS. Jos  $[O_t]$  on kuvitteellisen pallon vaiherata, niin  $l([O_t]) = 0$  ja väite pätee. Muutoin, koska  $l([O_t])$  on jaksonpituuden  $n$  monikerta, niin rataa  $[O_t]$  kiertävien pallojen lukumäärä  $p$  on kokonaisluku. Siispä mielivaltainen  $l([O_t])$ -pituisen väli  $I \subset \mathbf{Z}$  sisältää  $pn$  tahtia, ja jokainen radan  $[O_t] \subset \mathbf{Z}_n$  vaihe esiintyy tällä välillä täsmälleen  $p$  kertaa. Koska mikään rataa  $[O_t]$  kiertävä pallo ei voi välillä  $I$  saada samaa vaihetta kahdesti (ks. Määritelmän 3.4 jälkeinen huomautus), niin yhden vaiheen jokainen esiintymä ( $p$  kpl) vaatii oman pallonsa. Vaiherataa  $[O_t]$  kiertävien pallojen lukumäärä on siis vähintään  $p$ . Toisaalta jokainen vaiherataa  $[O_t]$  kiertävä pallo käy välillä  $I$  läpi kaikki vaiheensa, joten vaiherataa  $[O_t]$  kiertävien pallojen lukumäärä on täsmälleen  $p$ .  $\square$

**3.8. Esimerkki.** Kuviossa 453 (Esimerkki 3.6) vaiherataa  $\{0, 1\}$  kiertää  $\frac{1}{3}(4+5) = 3$  palloa ja vaiherataa  $\{2\}$  kiertää  $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$  pallo. Kaiken kaikkiaan kuviossa 453 on siis neljä palloa.

**3.9. Lause (keskiarvolause).** Jos jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  esittää siteswap-kuviota, niin pallojen lukumäärä on jonon numeroiden keskiarvo eli

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i.$$

TODISTUS. Olkoot kuvion vaiheradat  $[O_{t_1}], [O_{t_2}], \dots, [O_{t_k}]$ . ( $k \leq n$ .) Lauseen 3.2 mukaan vaiheradat ovat erillisiä, ja selvästi pätee myös

$\bigcup_{i=1}^k [O_{t_i}] = \mathbf{Z}_n$ , sillä jokainen tahti kuuluu johonkin vaiherataan. Jokaiselle vaiheradalle pallojen lukumäärä saadaan Lemmasta 3.7 ja kaiken kaikkiaan pallojen lukumäärä on

$$\begin{aligned} & p([O_{t_1}]) + p([O_{t_2}]) + \dots + p([O_{t_k}]) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{[i] \in [O_{t_1}]} a_i + \frac{1}{n} \sum_{[i] \in [O_{t_2}]} a_i + \dots + \frac{1}{n} \sum_{[i] \in [O_{t_k}]} a_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{[i] \in \bigcup_{i=1}^k [O_{t_i}]} a_i = \frac{1}{n} \sum_{[i] \in \mathbf{Z}_n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i. \end{aligned}$$

□

Seurausten 2.8-2.13 yhteydessä esitetyt väitteet pallojen lukumäärästä on nyt helppo todentaa Lauseen 3.9 avulla. Vakiojonon  $a, a, \dots, a$  keskiarvo on  $a$ , vaihtomuunnos ei muuta keskiarvoa ja globaali sekä lokaali muunnos muuttavat keskiarvoa yhdellä.

Mikäli kuviossa on useampi vaiherata, voidaan kuvio hajottaa yksinkertaisempiin osiin siten, että yhden tai useamman vaiheradan heittonumerot korvataan nolilla. Esimerkiksi kuvio 453 on yhdistelmä kolmen pallon kuvioista 450 ja yhden pallon kuvioista 003 (ks. esimerkki 3.8). Kolmen pallon kuviossa 450 kukin pallo kiertää samaa vaiherataa  $\{[0], [1]\}$ , jonka pituus on 9; kukin näistä palloista muodostaa yksinään kuvion 400050000.

**Esimerkki.** Tarkastellaan lukujonoa  $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 637512$ . Tässä  $\{[a_t + t]_6 : t = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 4, 9, 8, 5, 7\} = \{0, 4, 3, 2, 5, 1\} = \mathbf{Z}_6$ , joten jono 637512 esittää siteswap-kuviota. Kuvion pallojen lukumäärä on 4, sillä  $(6 + 3 + 7 + 5 + 1 + 2)/6 = 24/6 = 4$ . Tästä nähdään myös, että kuvion vaihefunktio on  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (0)(32)(514)$ ; kuviossa on siis kolme vaiherataa. Vaiherataa  $\{0\}$  kiertää  $a_0/6 = 6/6 = 1$  pallo, vaiherataa  $\{3, 2\}$  kiertää  $(a_3 + a_2)/6 = (5+7)/6 = 2$  palloa ja vaiherataa  $\{5, 1, 4\}$  kiertää  $(a_5 + a_1 + a_4)/6 = (2+3+1)/6 = 1$  pallo. Neljän pallon kuvio 637512 koostuu näin kahdesta yhden pallon kuvioista, 600000 ja 030012, sekä yhdestä kahden pallon kuvioista, 007500. Viimeisessä kuviossa kumpikin pallo muodostaa yksinään kuvion 700000050000.

**3.10. Suosituttuja kuvioita.** Tässä muutamia käytännössäkin mukavia siteswap-kuvioita; kasapäin lisää löytyy teoksesta [1, luku 8].

2 palloa: 31, 42, 501.

3 palloa: 423, 441, 44403, 52512, 50505, 55500, 51, 531, 450, 60, 612, 603, 630, 70701, 17170170.

4 palloa: 53, 453, 552, 55514, 642, 61616, 633, 660, 66620, 64514, 56414, 561, 723, 71, 7272712, 741, 714, 7161616.

5 palloa: 645, 6662, 66661, 666660, 77272, 744, 771, 777171, 75751.

Näiden tarkempi analysointi jätetään harjoitustehtäväksi.



## LUKU 4

### Siteswap-kuvioiden lukumäärä

Olkoot  $n \in \mathbf{Z}_+$ ,  $b \in \mathbf{N}$ . Haluamme määrittää kaikki  $n$ -pituiset jonot  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , jotka esittävät  $b$ :n pallon siteswap-kuviota. Kuvioiden lukumäärän laskeminen onnistuu Lauseiden 2.7 ja 3.9 avulla seuraavasti: ensin annetaan vaihefunktio eli mielivaltainen joukon  $\mathbf{Z}_n$  permutaatio ja sen jälkeen selvitetään kaikki tavat, joilla voi saada aikaan vaihefunktioita vastaavan kuvion  $a_0, \dots, a_{n-1}$  siten, että  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = b$ .

Olkoon siis  $b \in \mathbf{N}$  ja  $\phi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & n-1 \\ \phi_0 & \dots & \phi_{n-1} \end{pmatrix} \in S_n$  (ks. C.5). Halutaan jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , jolle

- (1)  $a_i \equiv_n \phi_i - i$  kaikilla  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  (Lause 2.7) ja
- (2)  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = b$  (Lause 3.9).

Ehto (1) antaa aiheen seuraaville määritelmille.

**4.1. Määritelmä.** Olkoon  $\phi \in S_n$  ja  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Luvun  $i$  etäisyys permutaatiossa  $\phi$  on luku  $\phi_i - i \in \mathbf{Z}$ . Jos  $\phi_i - i < 0$ , niin  $i$  on permutaation  $\phi$  vähennyskohta.

**4.2. Määritelmä.** Olkoon  $\phi \in S_n$  ja  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Tällöin etäisyyden  $\phi_i - i$  perusvaihe on luku  $d_i = d_i(\phi)$ , missä

$$d_i = \begin{cases} \phi_i - i, & \text{jos } \phi_i - i \geq 0 \\ n - |\phi_i - i|, & \text{jos } \phi_i - i < 0. \end{cases}$$

Harjoitustehtäväksi jää todistaa, että  $d_i \in \{0, \dots, n-1\}$  ja että  $d_i \equiv_n \phi_i - i$ . Luku  $d_i$  siis antaa ehdossa (1) halutun vaiheen  $[\phi_i - i]$  edustajan joukosta  $\{0, \dots, n-1\}$ .

**4.3. Lemma.** Olkoon  $\phi \in S_n$ . Perusvaiheiden  $d_i(\phi)$  keskiarvo yli joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  on kokonaisluku, merkitään  $k_\phi$ . Tämä luku on yhtä suuri kuin permutaation vähennyskohtien lukumäärä.

**TODISTUS.** Jos permutaatiossa  $\phi$  ei ole yhtään vähennyskohtaa, niin  $\phi$  on identtinen kuvaus ja  $d_i = 0$  kaikille  $i$ , joten väite pätee. Olkoon

permutaation  $\phi$  vähennyskohtien lukumäärä  $k > 0$  ja olkoot vähennyskohdat  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Tässä  $k < n$ , sillä nolla ei voi olla vähennyskohta. Merkitään  $\{0, \dots, n-1\} = \{i_1, \dots, i_k\} \cup \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ , jolloin mikään joukon  $\{i_{k+1}, \dots, i_n\}$  alkio ei ole permutaation  $\phi$  vähennyskohta. Nyt lukujen  $d_i$  keskiarvo yli joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  on

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d_i &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^k d_{i_j} + \sum_{i=k+1}^n d_{i_j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (n - |\phi_{i_j} - i_j|) + \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n (\phi_{i_j} - i_j) \\ &= \frac{1}{n} (kn + \sum_{j=1}^k (\phi_{i_j} - i_j)) + \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n (\phi_{i_j} - i_j) \\ &= k + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i - i) = k + 0 = k. \end{aligned}$$

□

**4.4. Lause.** Olkoon  $\phi \in S_n$  ja  $b \in \mathbf{N}$ . Siteswap-kuviot, joiden vaihefunktio on  $\phi$  ja pallojen lukumäärä  $b$ , vastaavat yksi yhteen joukon  $\mathbf{N}$  jonoja, joiden pituus on  $n$  ja alkioden summa on  $b - k_\phi$ .

**TODISTUS.** Jokainen ehdot (1) ja (2) toteuttava jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  on siteswap, jonka vaihefunktio on  $\phi$  ja pallojen lukumäärä  $b$ . Tällaiselle jonolle pätee  $a_i \equiv_n d_i$ , ts.  $a_i - d_i \equiv_n 0$  kaikilla  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Näin ollen luku  $\frac{1}{n}(a_i - d_i)$  on kokonaisluku kaikilla  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Huomataan myös, että näiden lukujen summa on

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - d_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d_i = \frac{1}{n} nb - \frac{1}{n} nk(\phi) = b - k_\phi.$$

Olkoot nyt kääntäen luvut  $u_i \in \mathbf{N}$  sellaisia, että  $\sum_{i=0}^{n-1} u_i = b - k_\phi$ . Tällöin haluttu siteswap  $a_0, \dots, a_{n-1}$  saadaan asettamalla  $a_i = d_i + n \cdot u_i$  kaikille  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Jonolle  $a_0, \dots, a_{n-1}$  nimittäin pätee nyt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (nu_i + d_i) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i + k_\phi = b - k_\phi + k_\phi = b$$

ja

$$a_i \equiv nu_i + d_i \equiv d_i.$$

□

**4.5. Esimerkki.** Olkoot  $n = b = 3$  ja  $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Permutaatiolla  $\phi$  on yksi vähennyskohta,  $i = 2$ . Perusvaiheet ovat  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 1$  ja  $d_2 = 1$ , joten  $k_\phi = 1$  ja  $b - k_\phi = 2$ . Jonoksi  $u_0u_1u_2$  kelpaa esimerkiksi jono 101. Tästä saadaan  $a_0 = d_0 + 3u_0 = 4$ ,  $a_1 = d_1 + 3u_1 = 4$  ja  $a_2 = d_2 + 3u_2 = 1$ , eli kuvio 441.

**4.6. Lause.** Joukon  $\mathbf{N}$  jonoja, joiden pituus on  $n$  ja alkioden summa  $b - k$ , on  $\binom{b-k+n-1}{n-1}$  kpl.

TODISTUS. Sovelletaan “pallo ja lokerot” -periaatetta.<sup>1</sup> Rakennetaan ensin  $n$ -paikkainen lokerikko laittamalla  $n-1$  väliseinää jonoon. Näiden väliin asetellaan mielivaltaisesti  $b - k$  palloa siten, että yhdessä välissä voi olla myös nolla tai  $b - k$  palloa. Jokainen lokero voidaan nyt tulkita joukon  $\mathbf{N}$  alkioiksi, joka ilmoittaa lokerossa olevien pallojen lukumäärän. Lokeroita on  $n$  kappaletta ja niissä olevien pallojen yhteenlaskettu lukumäärä on  $b - k$ , joten tällaiset lokeroasetelmat vastaavat yksi yhteen haluamiamme jonoja; esimerkiksi asetelma  $ooo|o||oo|||o$  vastaa jonoa 3, 1, 0, 2, 0, 0, 1. Riittää siis laskea erilaisten asetelmien lukumäärä.

Kun  $n - 1$  väliseinää ja  $b - k$  palloa asetetaan peräkkäin, on “paikkoja” (palloja ja väliseiniä) yhteensä  $b - k + n - 1$  kpl. Näistä paikoista voidaan  $n - 1$  väliseinää valita  $\binom{b-k+n-1}{n-1}$  tavalla. Lause on todistettu.  $\square$

Kuvioiden laskemisen kannalta epäselvänä on vielä kysymys: jos  $k \in \mathbf{N}$  on annettu, niin monessako permutaatioissa  $\phi \in S_n$  vähennyskohtien lukumäärä on  $k$ ? Hämmästyttävää kyllä, tämä luku on sama kuin Eulerin luku  $\langle n \rangle_k$  (ks. liite D). Todistusta varten tarvitsemme seuraavaa määritelmää:

**4.7. Määritelmä.** Permutaation  $\phi \in S_n$  *kanoninen sykliesitys* on se (yksikäsitteinen) sykliesitys, jossa syklien suurimmat alkiot ovat sykleissä ensimmäisinä ja syklit ovat suurimpien alkioden mukaan kasvavassa järjestyksessä. Esimerkiksi permutaatio  $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 451302$  saa kanonisessa sykliesityksessä muodon  $\phi = (3)(40)(521)$ .

**4.8. Huomio.** Kun permutaatio esitetään kanonisena sykliesityksenä, ovat sulut turhat, sillä seuraava sykli alkaa aina kohdasta, jossa on kaikkia edellisiä alkioita suurempi alkio. Jos esimerkiksi permutaation kanoninen sykliesitys ilman sulkujia olisi 36201754, olisi se sulkujen kanssa  $(3)(6201)(754)$ .

<sup>1</sup>Terminologia diskreetin matematiikan kurssilta (Kari Astala 2001).

**4.9. Lemma.** Olkoon  $\phi \in S_n$  ja olkoon  $\hat{\phi} \in S_n$  se hieman erikoinen permutaatio, joka saadaan permutaation  $\phi$  kanonisesta sykliesityksestä poistamalla sulut.<sup>2</sup> Tällöin kuvaus  $\phi \mapsto \hat{\phi}$  on bijektio.

TODISTUS. Kuvaus on surjektio huomion 4.8 nojalla. Kuvaus on injektio, koska kanoninen sykliesitys on yksikäsitteinen.  $\square$

**4.10. Lause.** Olkoon  $k \in \mathbf{N}$ . Tällöin permutaatioita  $\phi \in S_n$ , joiden vähennyskohtien lukumäärä on  $k$ , on  $\langle \binom{n}{k} \rangle$  kpl.

TODISTUS. Olkoot  $\phi$  ja  $\hat{\phi}$  kuten Lemmassa 4.9. Olkoon  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  permutaation  $\hat{\phi}$  laskukohta, ts.  $\hat{\phi}_{i+1} < \hat{\phi}_i$ . Permutaation  $\hat{\phi}$  konstruktio takaa, että alkiot  $\hat{\phi}_i$  ja  $\hat{\phi}_{i+1}$  kuuluvat peräkkäisinä alkioina samaan sykliin permutaatiossa  $\phi$ . Siispä

$$\hat{\phi}_{i+1} = \phi(\hat{\phi}_i) < \hat{\phi}_i,$$

joten  $\hat{\phi}_i$  on permutaation  $\phi$  vähennyskohta.

Olkoon nyt kääntäen  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  permutaation  $\phi$  vähennyskohta, ts.  $\phi_j < j$ . Näin ollen alkiot  $j$  ja  $\phi_j$  kuuluvat peräkkäisinä alkioina samaan sykliin permutaation  $\phi$  kanonisessa sykliesityksessä ja muodostavat laskukohdan permutaatiossa  $\hat{\phi}$ . (Alkio  $\hat{\phi}_j^{-1}$  on kyseinen laskukohta.)

Ollaan saatu, että permutaatiossa  $\phi$  on vähennyskohtia yhtä paljon kuin permutaatiossa  $\hat{\phi}$  on laskukohtia. Koska Eulerin luku ilmoittaa laskukohtien lukumäärän ja koska kuvaus  $\phi \mapsto \hat{\phi}$  on bijektio, on väite todistettu.  $\square$

**4.11. Yhteenveto.** Yhtä vaihefunktioita  $\phi \in S_n$  kohti saadaan

$$\binom{b-k_\phi+n-1}{n-1}$$

kuvioita. Annetulle  $k_\phi \in \mathbf{N}$  saadaan  $\langle \binom{n}{k_\phi} \rangle$  permutaatioita  $\phi \in S_n$ . Täten yhtä lukua  $k \in \mathbf{N}$  kohti saadaan

$$\binom{b-k+n-1}{n-1} \langle \binom{n}{k} \rangle$$

kappaletta kuvioita. Haluttu kuvioiden lukumäärä on näin ollen

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \langle \binom{n}{k} \rangle \binom{b-k+n-1}{n-1}.$$

Soveltamalla tähän Worpitzkyn kaavaa (D.8) saadaan nyt tulos, joka on yksinkertaisuudessaan yllättävä. Todistuksessa tarvitaan myös erästä binomikertoimien summaominaisuutta, joka todistetaan lemmalla alla.

<sup>2</sup>Jos esimerkiksi  $\phi = 451302$ , niin  $\hat{\phi} = 340521$ .



**4.12. Lemma.** Olkoot  $n, k \in \mathbf{Z}_+$ ,  $k \geq 2$ . Tällöin

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

TODISTUS. Yhtäsuuruus

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1}$$

seuraa siitä, että  $\binom{i}{k} = 0$ , kun  $i < k$ . Todistetaan yhtäsuuruus

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \binom{n}{k}$$

induktiolla  $n$ :n suhteen. Jos  $n = 1$ , niin väite pätee:

$$\binom{0}{k-1} = 0 = \binom{1}{k},$$

samasta syystä kuin edellä. Jos oletetaan, että väite pätee jollekin  $n$ , niin

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k-1} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

missä toiseksi viimeinen yhtälö seuraa induktio-oletuksesta ja viimeinen on tunnettu binomikertoimien summakaava, joka on helppo todistaa suoraan määritelmästä  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .  $\square$

**4.13. Lause.** Olkoon  $b \in \mathbf{Z}_+$  ja  $n \in \mathbf{N}$ . Tällöin  $n$ -pituisia jonoja  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , jotka esittävät *enintään*  $(b-1)$ :n pallon siteswap-kuvioita, on  $b^n$  kpl.

TODISTUS. Lähtien liikkeelle yhteenvedossa 4.11 saadusta kaavasta (1) saadaan nyt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle \binom{i-k+n-1}{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle \sum_{i=0}^{b-1} \binom{i-k+n-1}{n-1} \\ &\stackrel{1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle \binom{b-k+n-1}{n} \stackrel{2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \langle n \rangle \binom{b+i}{n} = b^n. \end{aligned}$$

$\square$

Tässä yhtälö 1) seuraa edellisestä lemmasta ja yhtälö 2) seuraa siitä, että

$$0 \leq k \leq n-1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq n-k-1 \leq n-1$$

ja siitä, että (Lause D.5(i))

$$\langle n \rangle = \langle n-1-k \rangle.$$

Viimeinen yhtälö seuraa Worpitzkyn kaavasta.

Seurauksena saadaan heti

**4.14. Lause.**  $n$ -pituisia jonoja  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , jotka esittävät täsmälleen  $b$ :n pallon siteswap-kuvioita, on  $(b+1)^n - b^n$  kpl.  $\square$

Lauseen historiasta ks. [12, kappale 2.7.1], jossa myös esitetään lauseelle erilainen todistus.

**4.15. Esimerkki.** Esimerkin 4.5 tapaan saadaan nyt konstruoitua kaikki 3-pituiset, kolmen pallon siteswap-kuvioita esittävät jonot. Näitä on  $4^3 - 3^3 = 37$  kpl: 900, 090, 009, 801, 180, 018, 720, 072, 207, 711, 171, 117, 630, 063, 306, 603, 360, 036, 612, 261, 126, 504, 450, 045, 531, 153, 315, 522, 252, 225, 441, 144, 414, 423, 342, 234 ja 333.

Tässä on vielä ongelmana syklisten muunnosten (ks. 2.14) poiskarsiminen. Halutaan siis lukumäärä  $n$ -jaksollisille kuvioille, joissa pallojen lukumäärä on  $b$  ja joissa sykliset muunnokset samaistetaan. Olkoon tämä lukumäärä  $K(n, b)$ .

Haluttu lukumäärä saadaan Möbiusinversiolla (Lause E.3). Jos  $d \mid n$ , niin jokainen  $d$ -jaksollinen kuvio sisältyy  $d$  kertaa edellä laskettuun lukuun  $(b+1)^n - b^n$ , kun sykliset muunnokset samaistetaan. Esimerkiksi 3-jaksollisesta, kolmen pallon kuvioista 423 saadaan kolme 6-pituista kolmen pallon kuviojonoa: 423423, 342342 ja 234234. Näin ollen

$$(b+1)^n - b^n = \sum_{d \mid n} d \cdot K(n, b).$$

Möbiusinversiolla saadaan nyt

**4.16. Lause.** Kuvioita, joiden jaksonpituus on  $n$  ja pallojen lukumäärä  $b$ , on

$$\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(n/d) ((b+1)^d - b^d)$$

kappaletta, kun sykliset muunnokset samaistetaan.  $\square$

**4.17. Esimerkki.** Luvun 3 tekijät ovat 1 ja 3. Näistä ainoastaan 3 on alkuluku, joten luvulla 3 on pariton määrä alkulukutekijöitä. Siispä

$\mu(1) = 1$  ja  $\mu(3) = -1$ , joten kun  $n = b = 3$ , saadaan kuvioiden lukumääräksi

$$\frac{1}{3}(-1 \cdot (4^1 - 3^1) + 1 \cdot (4^3 - 3^3)) = \frac{1}{3}(-1 + 37) = 12.$$

Esimerkin 4.15 kuvioista jäävät jäljelle: 900, 801, 720, 711, 630, 603, 612, 504, 531, 522, 441 ja 423. (Kuvio 333 ei kuulu joukkoon, sillä sen jaksonpituus on 1.)

Jäljellä on vielä yksi käytännöllinen ongelma: suurinumeroisten heittojen heittäminen on vaikeaa. Jos kuvion suurin heittonumero on  $n$ , niin kuvion puhdas ylläpitäminen useiden tahtien ajan on likimain yhtä vaikeaa kuin kuvion  $n$  puhdas ylläpitäminen. Herää siis kysymys: saadaanko laskettua lukumäärä kuvioille, joissa pallojen lukumäärä ja korkein mahdollinen etäisyysfunktion arvo on annettu? Onko tämä luku edes rajoitettu? Kysymykseen palataan seuraavassa luvussa.



## LUKU 5

### Siteswap-kuvioiden tilat ja siirtymät

**5.1. Johdanto.** Oletetaan, että jonglööri heittelee kuviota 3 ja haluaa siirtyä heittelemään kuviota 450. Siirtyminen ei onnistu suoraan, sillä siteswap-ehto rikkoontuu kaikissa vaihtoehdoissa (“toisiinsa osuvat” heitot merkitty):

$$\begin{aligned} & \dots 33333\check{3}45\check{0}450450 \dots \\ & \dots 333\check{3}33\check{0}45045045 \dots \\ & \dots 3333\check{3}35\check{0}4504504 \dots \end{aligned}$$

Seuraava jono sen sijaan indusoi siteswap-ehdon mukaisen bijektiivisen funktion:

$$\dots 3333334450450450 \dots$$

Miten siirtymät voidaan yleisesti ottaen päätellä muuten kuin yrityksen ja erehdyksen menetelmällä?

Tarkastellaan tilannetta, jossa jonglööri aloittaa heittelyn suoraan kuviolla 450 ja oletetaan, että ensimmäisellä tahdilla heitetään heitto 4. Kyseinen pallo on siis heitettävä jälleen neljän tahdin päästä ja tuo tahti on tästedes varattu. Tilannetta voidaan merkitä seuraavasti:

$$- - -x - - - \dots$$

Merkkijonon vasen reuna kuvaa nykyhetkeä ja merkit  $-$  ja  $x$  tulevia tahteja. Merkki  $x$  tarkoittaa, että kyseinen tahti on varattu. Tässä siis tulevista tahdeista kolme ensimmäistä ovat vapaita, neljäs on varattu ja kaikki seuraavat ovat vapaita.

Seuraavalla tahdilla heitetään heitto 5. Nyt tilanne on seuraava:

$$- - x - x - - - \dots$$

Tässä ollaan edelliseen tilanteeseen verrattuna liikuttu ajassa yksi tahti eteenpäin, joten ensimmäiseksi heitetty pallo on enää kolmen tahdin päässä.

Jatketaan samaan tapaan. Seuraavaksi heitto 0:

$$-x - x - - - \dots$$

Yhtään palloa ei ilmaannu lisää, mutta aikaisemmin heitetyt pallot lähestyvät. Nyt ollaan heitetty kerran heitot 4, 5 ja 0; seuraavaksi jälleen nelonen:

$$(1) \quad x - xx - - - \dots$$

Kaikki kolme palloa on saatu mukaan ja ensimmäisenä heitetty pallo on nyt heitettävä uudelleen, vuorossa heitto 5:

$$-xx - x - - - \dots$$

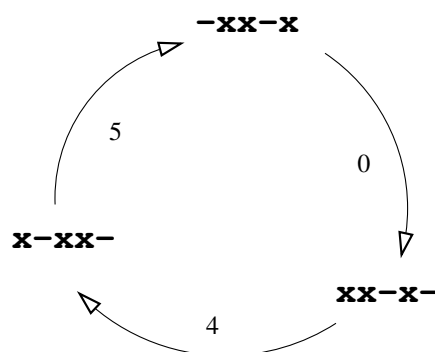
Sitten jälleen nolla:

$$xx - x - - - \dots$$

Toisena heitetty pallo on nyt vuorossa, heittona nelonen:

$$x - xx - - - \dots$$

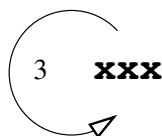
Nyt olemme täsmälleen samassa tilanteessa kuin kohdassa (1). Kaiken kaikkiaan kuvion 450 voi ilmaista seuraavanlaisena *tilasyklinä*:



Kuva 1. Kuvion 450 tilasykli.

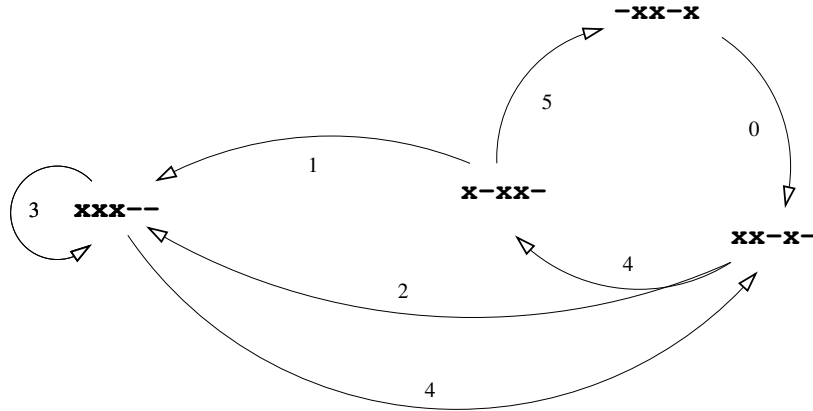
Koska 5 on maksimiheitto kuviossa 450, niin viiden pituiset merkkijonot riittävät kuvaamaan kuvion tiloja.

Kuvion 3 tilasykliksi saadaan vastaavasti:



Kuva 2. Kuvion 3 tilasykli.

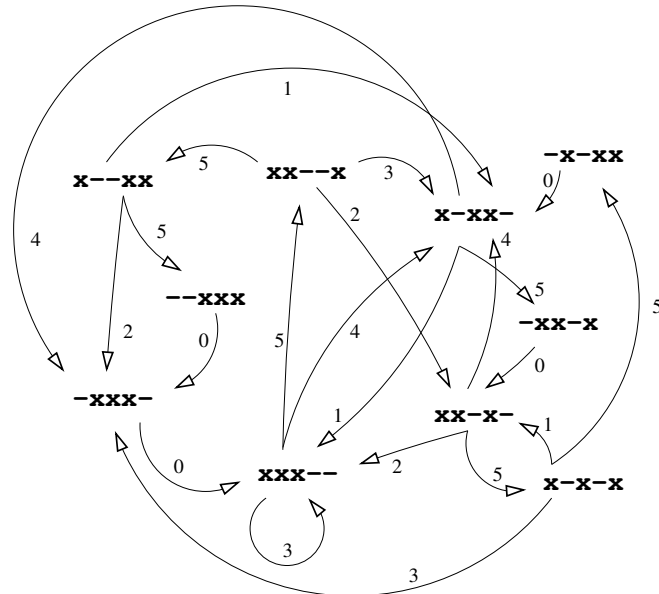
Kuviossa 3 on vain yksi tila,  $xxx$ . Tilaa, jossa kaikki  $x$ :t ovat peräkkäin vasemmalla, kutsutaan *perustilaksi*. Koska perustilaa ei kuvion 450 tilasyklistä löydy, ei kuviota 450 voi aloittaa suoraan kuviosta 3. Jos kuitenkin kesken kuvion 3 (perustilassa  $xxx$ ) heitetään heitto 4, niin päädytään tilaan  $xx - x$ , joka esiintyy kuviossa 450 muodossa  $xx - x -$ .



Kuva 3. Siirtyminen kuvioista 3 kuvioon 450 ja takaisin.

Kuvaan 3 on merkitty kaksi eri vaihtoehtoa siirtymiseksi kuvioista 450 takaisin kuvioon 3. Jos tilassa  $xx-x-$  heitetään heitto 2, päästään takaisin perustilaan. Toinen vaihtoehto on heiton 1 heittäminen tilassa  $x-xx-$ .

Kuviosta voidaan siirtyä suoraan toiseen täsmälleen silloin, kun kuvioilla on vähintään yksi yhteinen tila. Jos pallojen lukumäärä on  $b$  ja maksimiheitto  $h$ , niin erilaisia mahdollisia tiloja on  $\binom{h}{b}$  kappaletta. Jos  $b = 3$  ja  $h = 5$ , niin  $\binom{5}{3} = 10$  ja mikä tahansa suljettu kävely allaolevassa tilaverkossa on siteswap-kävely:



Kuva 3. Siteswap-kuvioiden ( $b = 3, h = 5$ ) tilaverkko.

Vastaava tilaverkko voidaan muodostaa mille tahansa  $b, h$ .

Siteswap-kuvio on *perustilakuvio* (eng. ground state pattern), jos yhden tiloista on perustila; tällöin siihen voidaan siirtyä suoraan peruskuvioista. Ellei kuvio ole perustilakuvio, se on *viritystilakuvio* (eng. excited state pattern).

Siteswap-kuvio on *alkukuvio* (eng. prime pattern), jos se ei käy samassa tilassa kahta kertaa jaksonsa aikana. Alkukuviot vastaavat tilaverkon syklejä (ks. liite F). Jokainen kuvio koostuu peräkkäin asetetuista alkukuvioista; esimerkiksi kolmen pallon kuvio 423441 koostuu kolmen pallon alkukuvioista 42, 3 ja 441.

Jos pallojen lukumäärä on kolme ja heittoluku enintään viisi, niin alkukuvioita eli syklejä kuvan 3 verkossa on 26 kpl: 3, 42, 51, 441, 522, 531, 450, 4440, 4530, 5241, 5340, 5511, 5520, 45501, 52440, 52530, 53502, 55140, 55500, 55050, 455040, 525501, 551502, 5255040, 5350530 ja 55150530. Näistä viritystilakuvioita ovat 51, 450 ja 55050.

Jos annettuna on pallojen lukumäärä  $b$  ja maksimiheitto  $h$ , niin alkukuvioiden lukumäärä on äärellinen, sillä tilaverkossa on äärellinen määrä tiloja ja näin ollen myös äärellinen määrä syklejä. Tästä syystä jakottomia *alkukuvioita* ei ole olemassa, mikäli etäisyysfunktio oletetaan rajoitetuksi.<sup>1</sup>

Valitettavasti alkukuvioiden lukumäärää ei tunneta, vaikka alkukuviot pystytäänkin luettelemaan tietokoneohjelmien avulla (ks. taulukko kohdassa 5.16).

Alkukuvioiden lukumäärään läheisesti liittyvä toinen avoin kysymys koskee alkukuvioiden maksimijaksonpituuksia. Voidaan osoittaa (ks. [2] ja [12, kappale 2.8]), että alkukuvion jaksonpituudelle saadaan merkittävästi tilojen lukumäärää  $\binom{b}{h}$  pienempi yläraja

$$\binom{b}{h} - \frac{1}{h} \sum_{d|\text{syt}(b,h)} \varphi(d) \binom{h/d}{b/d},$$

missä  $\varphi$  on Eulerin funktio. Kaikista tilaverkoista ei kuitenkaan löydy alkukuvioita, joiden jaksonpituus saavuttaa tämän ylärajan. Siitä, millaisilla parametreilla  $b, h$  yläraja saavutetaan, ei tiedetä juuri mitään.<sup>2</sup>

Määritellään nyt tilaverkko täsmällisesti ja tutkitaan, miten siteswapkuviot ja tilaverkot liittyvät toisiinsa.

<sup>1</sup>Jaksoton alkukuvio, jonka etäisyysfunktio ei ole rajoitettu, esitellään artikkelissa [3].

<sup>2</sup>Dietrich Kuske (<http://www.math-tu.dresden.de/~kuske>) on todistanut, että jos  $b \geq 3$  ja  $h = 2b$ , niin ylärajaa ei voida saavuttaa; todistus tekstissä [2].

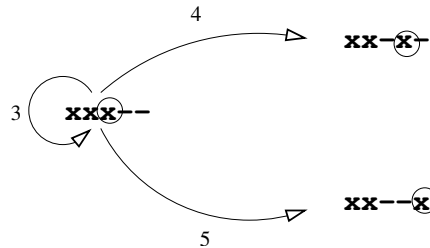


**5.2. Määritelmä.** Olkoon annettuna luvut  $b \in \mathbf{Z}_+$  ja  $h \geq b$ . Tilajoukko  $S(b, h)$  koostuu kaikista joukon  $\{0, 1\}$  jonoista, joiden pituus on  $h$  ja joissa on täsmälleen  $b$  ykköstä. Tällaisia jonoja on  $\binom{h}{b}$  kappaletta ja niitä kutsutaan tilajoukon  $S(b, h)$  tiloiksi.

**5.3. Määritelmä.** Olkoon  $s = s_1, \dots, s_h$  tila joukossa  $S(b, h)$ . Indeksijä  $i \in \{1, \dots, h\}$ , joille  $s_i = 1$ , kutsutaan tilan  $s$  varatuiksi kohdiksi. Indeksit, joille  $s_i = 0$ , ovat tilan  $s$  vapaita kohtia.

**5.4. Määritelmä.** Olkoot  $s = s_1, \dots, s_h$  ja  $s' = s'_1, \dots, s'_h$  tiloja joukossa  $S(b, h)$ . Tila  $s'$  on tilan  $s$  seuraaja, mikäli  $s'_i = 1$  aina, kun  $s_{i+1} = 1$  ( $i \neq h$ ).

**5.5. Huomio/Määritelmä.** Tilan  $s$  seuraaja siis saadaan siirtämällä tilan varattuja kohtia askeleen vasemmalle ja lisäämällä mahdollinen "reunalta pudonnut" ykkönen vapaaseen kohtaan. Jos  $s_1 = 0$ , niin tilanne on yksinkertainen:  $s'_h = 0$  ja  $s'_i = 0$  aina, kun  $s_{i+1} = 0$ . (Tällöin tilalla  $s$  on vain yksi seuraaja.) Jos taas  $s_1 = 1$ , niin  $s'_i = 1$  täsmälleen yhdelle indeksille  $i$ , jolle  $i = h$  tai  $s_{i+1} = 0$ . Tätä jonon  $s'$  kohtaa sanotaan sanotaan tilan  $s$  laskeumaksi tilassa  $s'$ . Tilan  $s$  laskeuma on siis määritelty vain tiloille, joiden ensimmäinen kohta on varattu, ja mahdollisia seuraajia (laskeumia) tällaiselle joukon  $S(b, h)$  tilalle on  $h - b + 1$  kpl.



Kuva 4. Perustilan seuraajat ja laskeumat tilajoukossa  $S(3, 5)$ .

**5.6. Määritelmä.** Siteswap-kuvioiden tilaverkko  $G(b, h)$  on suunnattu verkko  $(V, E)$ , jossa  $V = S(b, h)$  ja jossa  $(s, s') \in E$  täsmälleen silloin, kun tila  $s'$  on tilan  $s$  seuraaja.

**5.7. Määritelmä.** Olkoon  $G(b, h) = (V, E)$  tilaverkko. Määritellään nuolelle  $(s, s') \in E$  heittoluku seuraavasti:

- (i) Jos  $s_1 = 0$ , niin nuolen  $(s, s')$  heittoluku on nolla.
- (ii) Jos  $s_1 = 1$ , niin nuolen  $(s, s')$  heittoluku on tilan  $s$  laskeuma tilassa  $s'$ .

On selvää, että yhdestä tilasta lähtevien nuolien heittolukujen on oltava keskenään eri lukuja. Sama pätee tilaan saapuville nuolille, sillä tila ja siihen saapuvan nuolen heittoluku määräävät edeltävän tilan yksikäsitteisesti.

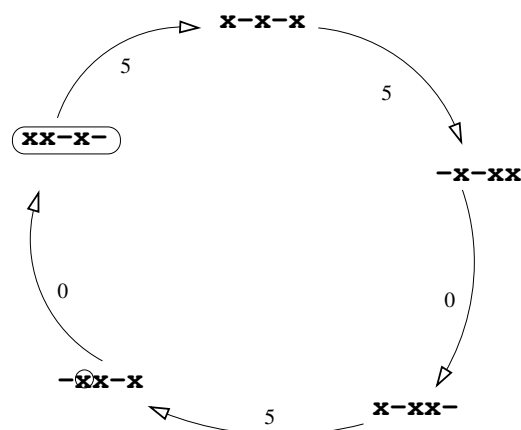
Tavoitteena on nyt osoittaa, että jokainen tilaverkon  $G(b, h)$  suljettu kävely vastaa jaksollista siteswap-kuviota, jonka pallojen lukumäärä on  $b$ . Halutaan myös käänteinen tulos: jokainen  $b$ :n pallon jaksollinen siteswap-kuvio, jossa etäisyysfunktion yläraja on  $h$ , vastaa suljettua kävelyä tilaverkolla  $G(b, h)$ . Tulosten todistamista varten määritellään ensin *lähtötilan* käsite.

**5.8. Määritelmä.** Olkoon  $t_0, \dots, t_n$  ( $t_n = t_0$ ) suljettu kävely tilaverkolla  $G(b, h)$ . Olkoon  $t_i$  eräs kävelyn tiloista ja olkoon edelleen  $j$  mielivaltainen tilan  $t_i$  varattu kohta. Määritellään tilan  $t_i$  varatulle kohdalle  $j$  *lähtötila* seuraavasti:

- (i) Jos  $j$  on tilan  $t_{i-1}$  laskeuma tilassa  $t_i$ , niin lähtötila on  $t_{i-1}$ , missä  $i - 1$  lasketaan mod  $n$ .
- (ii) Muussa tapauksessa  $j + 1$  on varattu kohta tilassa  $t_{i-1}$ . Tällöin tilan  $t_i$  kohdan  $j$  lähtötila määritellään samaksi kuin tilan  $t_{i-1}$  kohdan  $j + 1$  lähtötila.

Määritelmä on rekursiivinen (vrt. A.3). Rajaehto saavutetaan, sillä jokaisella rekursioaskeleella varattu kohta siirtyy eteenpäin ja jos  $h$  on varattu kohta tilassa  $t_i$ , niin välttämättä  $h$  on tilan  $t_{i-1}$  laskeuma tilassa  $t_i$ .

Jos siis annettuna on tilaverkon suljettu kävely, niin mille tahansa varatulle kohdalle missä tahansa tilassa löytyy aina yksikäsitteinen lähtötila.



Kuva 5. Suljettu kävely verkolla  $G(3, 5)$ . Tilan  $-xx - x$  kohdan 2 lähtötila on tila  $xx - x-$ .

**5.9. Lause.** Olkoon  $t_0, \dots, t_n$  suljettu kävely tilaverkolla  $G(b, h)$  ja olkoon nuolen  $(t_i, t_{i+1})$  heittoluku  $a_i$ . Tällöin  $a_0, \dots, a_{n-1}$  esittää siteswap-kuviota.

TODISTUS. Lauseen 2.7 nojalla riittää osoittaa, että  $\{[a_i + i]_n \mid i = 0, \dots, n-1\} = \mathbf{Z}_n$ . Tätä varten tehdään antiteesi: löydetään indeksit  $i$  ja  $j$  joukosta  $\{0, \dots, n-1\}$  siten, että  $i \neq j$  ja että  $a_i + i \equiv_n a_j + j$ . Lauseen 2.14 nojalla voidaan olettaa, että  $i = 0$ . Lisäksi toisen luvuista  $a_i$  ja  $a_j$  on oltava nollasta poikkeava, sillä muuten olisi  $i = j$ .

Olkoon siis  $a_0 \equiv a_j + j$ , missä  $j \neq 0$  ja  $a_0 \neq 0$ . Jos olisi  $a_j = 0$ , niin tilan  $t_j$  ensimmäinen kohta olisi vapaa. Toisaalta tällöin olisi  $a_0 = j$ , jolloin tilan  $t_1$  kohta  $j$  olisi varattu ja edelleen tilan  $t_j$  ensimmäinen kohta olisi varattu. Päädyttäisiin ristiriitaan.

Siispä on oltava  $a_j \neq 0$ . Toisin sanoen tilan  $t_{j+1}$  kohta  $a_j$  on varattu ja sen lähtötila on  $t_j$ . Tästä saadaan, että tilan  $t_{j+a_j} = t_{a_0}$  kohta 1 on varattu ja myös sen lähtötila on  $t_j$ . Toisaalta tiedetään, että tilan  $t_1$  kohta  $a_0$  on varattu ja sen lähtötila on  $t_0$ . Tästä taas saadaan, että tilan  $t_{a_0}$  kohta 1 on varattu ja sen lähtötila on  $t_0$ . Koska  $j \neq 0$  ja koska varatun kohdan lähtötila on yksikäsitteinen, ollaan päädytty ristiriitaan.  $\square$

**5.10. Lause.** Olkoon  $t_0, \dots, t_n$  suljettu kävely tilaverkolla  $G(b, h)$  ja olkoon nuolen  $(t_i, t_{i+1})$  heittoluku  $a_i$ . Tällöin lukujen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  keskiarvo on  $b$ .

TODISTUS. Olkoon  $\sigma : \{t_0, \dots, t_{n-1}\} \rightarrow \mathbf{N}$  funktio, joka ilmoittaa tilan varattujen kohtien indeksien summan. Esimerkiksi  $\sigma(10110) = 1 + 3 + 4 = 8$  ja  $\sigma(01101) = 2 + 3 + 5 = 10$ .

Nyt  $\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) = a_i - b$ , sillä siirryttäessä tilasta  $t_i$  tilaan  $t_{i+1}$  jokainen ykkönen siirtyy ensin askeleen vasemmalle (täten  $-b$ ) ja tämän jälkeen mahdollinen "reunalta pudonnut" ykkönen ilmestyy tilan  $t_{i+1}$  kohtaan  $a_i$ . (Jos reunalla ei ollut ykköstä, niin  $a_i = 0$ .)

Kun tilat on kävelty läpi ja palattu takaisin tilaan  $t_0$ , on  $\sigma$ :n kokonaismuutos nolla. Siispä

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b) = 0,$$

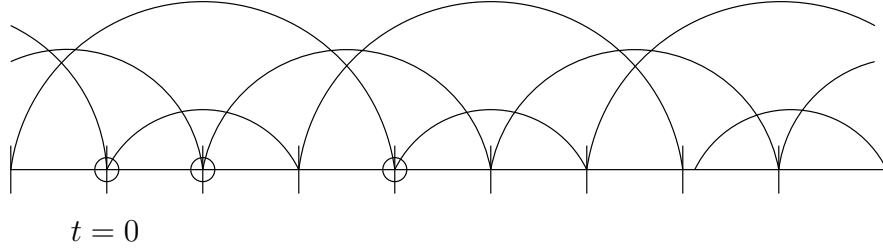
josta väite seuraa.  $\square$

Näin puolet tavoitteesta on saavutettu, eli jokainen tilaverkon suljettu kävely vastaa siteswap-kuviota luonnollisella tavalla. Toisen suunnan todistamiseksi määrittellään aluksi *laskeutumisjoukon* käsite.

**5.11. Määritelmä.** Olkoon  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  siteswap-kuvio, ja olkoon  $t \in \mathbf{Z}$ . Joukko

$$L_f(t) = \{u \geq t \mid f^{-1}(u) < t\}$$

on kuvion  $f$  laskeutumisjoukko tahdilla  $t$ .



Kuva 5. Kuvion laskeutumisjoukko tahdilla  $t = 0$  on  $\{0, 1, 3\}$ .

Merkitään jatkossa joukkoa  $L_f(t)$  pelkästään  $L(t)$ . (Funktio  $f$  oletetaan aina annetuksi.)

**5.12. Lause.** Joukon  $L(t)$  alkioiden lukumäärä on kaikilla  $t \in \mathbf{Z}$  sama kuin kuvion  $f$  pallojen lukumäärä.

TODISTUS. Tarkastellaan kuvion ratoja (ks. määritelmä 1.10), joissa on enemmän kuin yksi alkio; tällöin radat eivät ole kuvitteellisten pallojen ratoja. Näiden ratojen lukumäärä on sama kuin kuvion pallojen lukumäärä.

Jokainen  $u \in L(t)$  kuuluu selvästi johonkin tällaiseen rataan, sillä  $f^{-1}(u) < u$  (eli ei voi olla  $f(u) = u$ ). Lisäksi jokaisesta radasta löytyy tahteja  $m$ , joille pätee  $m \geq t$ . Pienimmän näistä (olkoon  $m_0$ ) on kuuluttava joukkoon  $L(t)$ . Ellei näin olisi, olisi  $f^{-1}(m_0) \geq t$ , eli  $m_0$  ei olisikaan pienin radan alkio, jolle  $m \geq t$ .  $\square$

**5.13. Määritelmä.** Olkoon  $f$  siteswap-kuvio, jossa pallojen lukumäärä on  $b$  ja etäisyysfunktion  $d$  yläraja  $h \geq b$ . Kuvion  $f$  tila tahdilla  $t \in \mathbf{Z}$  on jono  $s = s_1, \dots, s_h \in S(b, h)$ , jolle

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{kun } (i-1) + t \in L(t), \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

**5.14. Lause.** Olkoon  $f$  siteswap-kuvio, jossa pallojen lukumäärä on  $b$  ja etäisyysfunktion yläraja  $h$ . Olkoon  $t \in \mathbf{Z}$  ja olkoot  $s$  ja  $s'$  kuvion  $f$  tilat tahdeilla  $t$  ja  $t+1$ . Tällöin  $s'$  on  $s$ :n seuraaja.

TODISTUS. Osoitetaan, että määritelmän 5.4 ehto on voimassa. Olkoon  $i \geq 1$ ,  $i < h$  sellainen, että  $i+1$  on tilan  $s$  varattu kohta, ts.  $i+t \in L(t)$ . Halutaan osoittaa, että  $i$  on tilan  $s'$  varattu kohta eli, että  $(i-1) +$

$(t + 1) \in L(t + 1)$ , ts.  $i + t \in L(t + 1)$ . Tämä on triviaalia: koska  $f^{-1}(i + t) \leq t$ , niin varmasti  $f^{-1}(i + t) \leq t + 1$ . (Lisäksi  $i + t \geq t + 1$ , koska  $i \geq 1$ .)  $\square$

Nyt tiedetään, että jokainen jaksollinen  $b$ :n pallon siteswap-kuvio, jossa etäisyysfunktion yläraja on  $h$ , määrää suljetun kävelyn tilaverkolla  $G(b, h)$ . Osoittamatta on vielä yksi asia:

**5.15. Lause.** Olkoon  $f$  siteswap-kuvio, jonka pallojen lukumäärä on  $b$  ja etäisyysfunktion yläraja  $h$ . Olkoon  $t \in \mathbf{Z}$  ja olkoot  $s$  ja  $s'$  kuvion  $f$  tilat tahdeilla  $t$  ja  $t + 1$ . Tällöin nuolen  $(s, s') \in E(b, h)$  heittoluku on  $f(t) - t$ .

**TODISTUS.** Jos tilan  $s$  ensimmäinen kohta on vapaa, niin nuolen  $(s, s')$  heittoluku on nolla (määritelmä 5.7.) Toisaalta tällöin pätee  $t \notin L(t)$  eli  $f^{-1}(t) \geq t$ . Koska siteswap-kuviolle pätee  $f(t) \geq t$ , niin on oltava  $f(t) = t$  eli  $f(t) - t = 0$ .

Olkoon sitten tilan  $s$  ensimmäinen kohta varattu ja olkoon  $f(t) = t + i$ , missä  $1 \leq i \leq h$ . (On oltava  $i \geq 1$ , sillä  $t \in L(t)$  eli  $f(t) \neq t$ .) Halutaan osoittaa, että nuolen  $(s, s')$  heittoluku on  $i$  eli, että  $i$  on tilan  $s$  laskeuma tilassa  $s'$ . Tämä tarkoittaisi (ks. huomio 5.5), että olisi joko  $i = h$  tai  $s_{i+1} = 0$ . Jos siis  $i$  ei olisi tilan  $s$  laskeuma tilassa  $s'$ , olisi välttämättä  $i < h$  ja  $s_{i+1} = 1$ . Olisi siis  $i + t \in L(t)$ , josta  $f^{-1}(i + t) < t$ . Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan  $f^{-1}(i + t) = t$ .  $\square$

Näin on tullut osoitetuksi, että jaksolliset siteswap-kuviot ja tilaverkkojen suljetut kävelyt vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan luonnollisella tavalla. Runsaasti muita tilaverkkoja koskevia tuloksia löytyy teoksesta [12].

**5.16. Alkukuvioita.** Alla taulukko alkukuvioista verkossa  $G(b, 7)$ , missä  $2 \leq b \leq 5$  ja missä alkukuvion jaksonpituus on korkeintaan viisi. Viritystilakuvioihin on merkitty yksinkertaisimmat siirtymäheitot perustilakuvioista itse kuvioon ja takaisin. Listan ensimmäinen viritystilakuvio on kahden pallon kuvio 40, joka näkyy listalla muodossa 3 40 1, ts. kuvioon “mennään sisään” heitolla 3 ja kuvioista “tullaan ulos” heitolla 1:

... 22222**3**404040 ... 404040122222 ...

$b = 2:$	$b = 3:$	$b = 4:$	$b = 5:$
2	3	4	5
31	42	53	64
3 40 1	4 51 2	5 62 3	6 73 4
330	45 60 12	56 71 23	663
411	441	552	744
420	522	633	753
3 501 1	531	642	6 672 4
4 600 11	4 450 2	5 561 3	66 771 3
4130	4 612 2	5 723 3	6662
4400	4 630 2	5 741 3	6752
5111	5 711 22	55 660 2	7463
5120	5 720 22	55 714 2	7562
5201	44 603 1	55 750 2	7733
5300	4440	5551	7742
3 6011 1	4530	5641	6 6671 4
3 6020 1	5241	6352	6 7571 4
4 7001 11	5340	6451	66 6770 3
35020	5511	6622	66661
45001	5520	6631	66751
51130	6222	7333	67561
51400	6231	7342	67723
52030	6312	7423	67741
55000	6330	7441	74662
61111	6411	7522	74752
61120	6420	7531	75661
61201	4 4602 2	5 5560 3	75724
61300	4 7122 2	5 5713 3	75751
62011	4 7131 2	5 5740 3	77362
62020	4 7302 2	5 6460 3	77461
63001	4 7401 2	5 6730 3	77722
64000	5 5700 22	55 5704 2	77731

(jatkuu)

$b = 2:$	$b = 3:$	$b = 4:$	$b = 5:$
3 50500 1	44 6051 1	55 7162 2	6 66670 4
3 70111 1	44 7023 1	55 7702 2	6 67570 4
3 70120 1	44 7041 1	555 7063 1	6 75670 4
3 70201 1	45501	55550	6 77272 4
3 70300 1	46131	55640	6 77470 4
	46401	56450	
	52440	56612	
	52530	56630	
	53502	57242	
	55140	57440	
	55500	57512	
	56112	57530	
	56130	63551	
	56202	63641	
	56400	64550	
	62241	64613	
	62340	64640	
	62511	66251	
	62520	66350	
	63141	66611	
	63501	66620	
	64140	67223	
	64500	67241	
	66111	67313	
	66120	67340	
	66201	67511	
	66300	67520	
	72222	73352	
	72231	73451	
	72312	73622	
	72330	73631	
	72411	74252	
	72420	74450	
	73122	74612	
	73131	74630	
	73302	75251	
	73401	75350	
	74112	75611	
	74130	75620	
	74202	77222	

(jatkuu)

$b = 2:$	$b = 3:$	$b = 4:$	$b = 5:$
	74400	77231	
	75111	77312	
	75120	77330	
	75201	77411	
	75300	77420	
	4 47022 2	5 55703 3	
	4 47031 2	5 56702 3	
	4 55050 2	5 64703 3	
	4 57012 2	5 66161 3	
	4 57030 2	5 66701 3	
	4 61350 2	5 72461 3	
	4 61611 2	5 72722 3	
	4 61620 2	5 72731 3	
	4 64050 2	5 74702 3	
	4 67011 2	5 75161 3	
	4 67020 2	5 75701 3	
	5 61701 22	55 57062 2	
	44 70251 1	55 67061 2	
	44 70350 1	56 67070 23	
	44 70611 1	555 70661 1	
	44 70620 1	555 70724 1	
	45 70701 12	555 70751 1	



## LUKU 6

### Synchro-kuvioista

Tähän asti tarkastelun alla ovat olleet yksinomaan siteswap-kuviot, joissa on kaksi olennaista rajoitusta (1.5 ja 1.6):

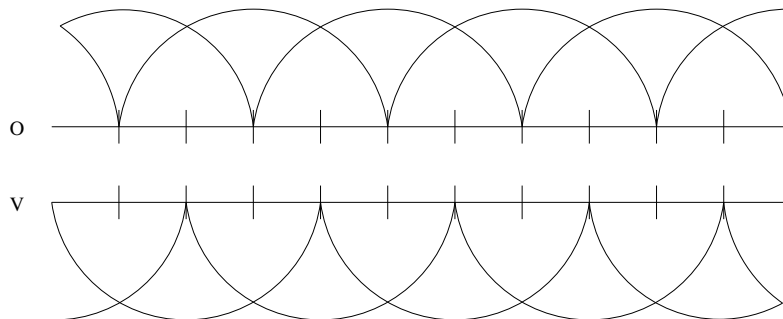
1. kullakin tahdilla on enintään yhden pallon heittäminen sallittua
2. kullakin tahdilla heittää täsmälleen yksi käsi.

Näistä jälkimmäinen on ensimmäisen käytännöllinen seuraus, kuten mainittiin kohdassa 1.6. *Synchro*-kuviot saadaan aikaan siten, että poistetaan rajoitus 2 kokonaan ja muutetaan rajoitus 1 muotoon

**6.1. Rajoitus (multiplex-kielto).** Kullakin tahdilla on sallittua enintään yhden pallon heittäminen *kustakin kädestä*.

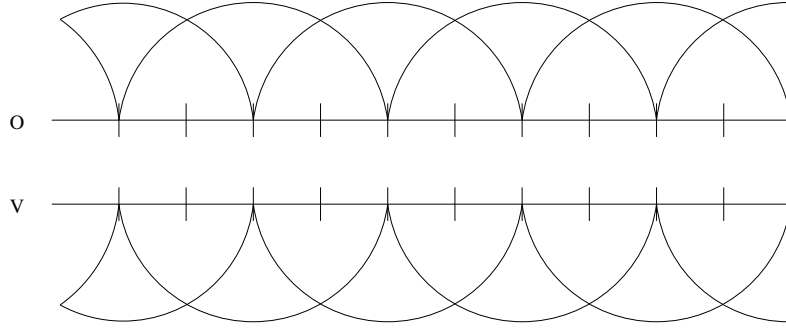
Jos oletamme, että käsiä on kaksi kappaletta, niin tällöin koordinaatistoon piirretyissä synchro-kuvioissa on aiemman yhden rivin sijasta kaksi riviä, kummallekin kädelle omansa.

**6.2. Esimerkki.** Tarkastellaan neljän pallon perussiteswap-kuviota 4 synchro-kontekstissa.



Kuva 1. Neljän pallon perussiteswap 4 eli synchro-kuvio  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

Neljän pallon peruskuvioita voi heitellä myös tasatahtiin:



Kuva 2. Neljän pallon perussynchro-kuvio  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$   
(tai  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ks. Huomautus 6.4).

**6.3. Määritelmä.** *H-kätinen Synchro-kuvio* on bijektio joukolta  $\mathbf{Z} \times \{1, \dots, H\}$  itselleen. Jos  $(t_0, h_0) \mapsto (t_1, h_1)$ , niin funktion tulee toteuttaa lisäehto  $t_1 \geq t_0$ . Edelleen määritellään  $f$ :n *etäisyysfunktio*

$$d : \mathbf{Z} \times \{1, \dots, H\} \rightarrow \mathbf{N} \times \{1, \dots, H\}$$

lausekkeella

$$d(t_0, h_0) = (t_1 - t_0, h_1).$$

Funktion tulkinta on sama kuin siteswap-kuvion tapauksessa. Määritelmä palautuu siteswap-kuvion määritelmään, kun  $H = 1$ .

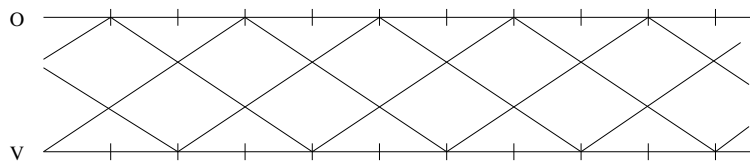
Neljän pallon perussynchro-kuviolle etäisyysfunktio on

$$d(t, 1) = \begin{cases} (4, 1), & t \text{ parillinen} \\ (0, 1), & t \text{ pariton} \end{cases}$$

$$d(t, 2) = \begin{cases} (4, 2), & t \text{ parillinen} \\ (0, 2), & t \text{ pariton}; \end{cases}$$

tästä seuraa luonnollisesti merkintä  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

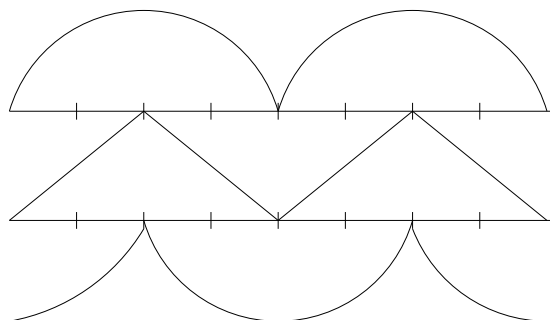
Entä, jos heitetään pallo kädestä toiseen? Kolmen pallon kaskadi näyttää synchro-kontekstissa tältä:



Kuva 3. Siteswap-kuvio 3 eli synchro-kuvio  $\begin{pmatrix} 3_2 & 0 \\ 0 & 3_1 \end{pmatrix}$   
(alaindeksit viittaavat käteen, johon pallo heitetään).

Kahden käden tapauksessa alaindeksinä käytetään numeroiden sijasta ainoastaan symbolia  $x$  sen merkiksi, että heitto heitetään kädestä toiseen. Näin kolmen pallon kaskadi saa muodon  $\begin{pmatrix} 3_x & 0 \\ 0 & 3_x \end{pmatrix}$ .

Jos kuvio voidaan esittää siteswap-muodossa, ei sitä yleensä ole järkevää esittää monimutkaisemmassa synchro-muodossa.<sup>1</sup> Useita kuvioita (ns. *aitoja* synchro-kuvioita) ei kuitenkaan voi esittää muussa kuin synchro-muodossa. Tällaisia ovat esimerkiksi edellämainittu neljän pallon  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$  sekä kolmen pallon *boksi*:



Kuva 4. Boksi eli kuvio  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

**6.4. Huomautus.** Jos heittokorkeuksissa lähdetään liikkeelle siteswap-kuvioista kuten edellä on koko ajan tehty, niin aitojen synchro-kuvioiden matriiseissa joka toinen sarake sisältää pelkkiä nollia, eikä parittomia heittonumeroita lainkaan esiinny. Kompaktimpi muoto esittää aidot synchro-kuvioita on jättää nollasarakkeet pois. Tästä kuitenkin seuraa, ettei saatu matriisi enää esittää määritelmän 6.3 mukaista kuvioita. Matemaattisesti korrekimpi tapa olisi nollasarakkeiden poisjättämisen lisäksi jakaa heittonumerot kahdella, mutta tällöin heittonumeroiden tulkinta olisi täysin erilainen synchro- ja siteswap- tapauksissa. Vakiintunut käytäntö on ainoastaan poistaa nollasarakkeet.

Näin boksi saa muodon  $\begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$ , joka ladonnan helpottamiseksi kirjoitetaan tavallisesti sarakkeet eroteltuina muodossa  $(4, 2x), (2x, 4)$ . Neljän pallon perussynchro-kuvio puolestaan saa muodon  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ , joka kirjoitetaan vastaavasti  $(4, 4)$ .

*Ainoa* ero heittonumeroiden tulkinnassa siteswap- ja synchro-kuvioiden välillä esiintyy nyt vaakasuoran heiton tapauksessa. Siteswap-kuvioiden ykkönen vastaa synchro-kuviossa heittoa  $2x$ . (Vrt. animaattorilla boksia  $(4, 2x), (2x, 4)$  siteswap-kuvioon 441. Myös seuraavat esimerkit selventänevät asian.)

<sup>1</sup>Järkevää se on vain silloin, kun tutkitaan siirtymiä siteswap- ja synchro-kuvioiden välillä.

### 6.5. Esimerkkejä animaattoriin syötettäväksi.

(4, 4)  
(4x, 4x)  
(4x, 2x)  
(4x, 2x), (4, 2x), (2x, 4x), (2x, 4)  
(4, 0), (4, 4)  
(4, 0), (4x, 4x)  
(6x, 4x)  
(6, 4), (4, 2), (4, 6), (2, 4)  
(6x, 2x)

(Kasapäin lisää esimerkkejä teoksessa [1].)

Permutaatiotesti ja keskiarvolause pätevät myös synchro-kuvioille, esitellään ne tässä todistamatta.

**6.6. Lause (permutaatiotesti).** Olkoon  $A$   $H \times n$ -matriisi (ts.  $H$  riviä ja  $n$  saraketta), jonka alkiot kuuluvat joukkoon  $\mathbf{N} \times \{1, \dots, H\}$ . Merkitään yleistä alkiota  $(a_{ij}, h_{ij})$ , missä  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, H$ . Jos  $A$  esittää  $n$ -jaksollista,  $H$ -kätistä synchro-kuviota, niin

$$\{([a_{ij} + i]_n, h_{ij}) \mid i = 1, \dots, n\} = \mathbf{Z}_n \times \{1, \dots, H\}.$$

Kääntäen, jos ehto pätee, niin  $A$  esittää kuviota, jonka jaksonpituus on luvun  $n$  tekijä.  $\square$

**6.7. Esimerkki.** Osoitetaan, että boksi  $(4, 2x), (2x, 4)$  esittää synchro-kuviota. Muutetaan ensin boksen esitys matriisimuotoon, jossa nollosarakkeet ja käsi-indeksit ovat mukana:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 4_1 & 0_1 & 2_2 & 0_1 \\ 2_1 & 0_2 & 4_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

(Nollat heitetään aina samaan käteen.) Tässä  $n = 4$  ja  $H = 2$ . Kun heittonumeroihin lisätään vaihe ja lasketaan modulo  $n$ , saadaan matriisi

$$A' = \begin{pmatrix} 0_1 & 1_1 & 0_2 & 3_1 \\ 2_1 & 1_2 & 2_2 & 3_2 \end{pmatrix},$$

jonka alkioina ovat täsmälleen joukon  $\{0, 1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$  alkiot; siispä boksi esittää synchro-kuviota.

**6.8. Huomio.** Esimerkissä 6.7 oltaisiin päästy helpommalla, jos nollosarakkeiden lisäämisen sijasta oltaisiin jaettu numerot kahdella (vrt. huomio 6.4) ja tarkasteltu yhtäpitävää matriisiesitystä  $A = \begin{pmatrix} 2_1 & 1_2 \\ 1_1 & 2_2 \end{pmatrix}$ .

**6.9. Lause (keskiarvolause).** Olkoon  $A$  synchro-kuviota esittävä matriisi, jossa on  $H$  riviä ja  $n$  saraketta; merkitään yleistä alkioa  $(a_{ij}, h_{ij})$ . Tällöin kuvion pallojen lukumäärä on

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^H a_{ij},$$

eli heittolukujen summa jaettuna sarakkeiden lukumäärällä.  $\square$

Lause toimii täsmälleen samalla tavoin kuin siteswap-tapauksessa; käsi-indekseistä ei tarvitse välittää. Mikäli nollosarakkeet on jätetty pois kuvion esityksestä, on jaettava vielä kahdella.

**Esimerkki.** Boksissa  $(4, 2x), (2x, 4)$  on kolme palloa, sillä

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(4 + 2 + 2 + 4) = 3.$$

Synchro-kuvioiden lukumäärästä tiedetään hyvin vähän (ks. [12, luku 4]).

Synchro-kuvioiden radat sekä tilat ja siirtymät toimivat kuten siteswap-tapauksessa, mutta nyt yhdessä tilassa on yhden rivin asemesta  $H$  riviä ja tilasta siirrytään toiseen  $H$ :n eri heittoluvun avulla. Havainnollistetaan lopuksi boksen avulla näitäkin:

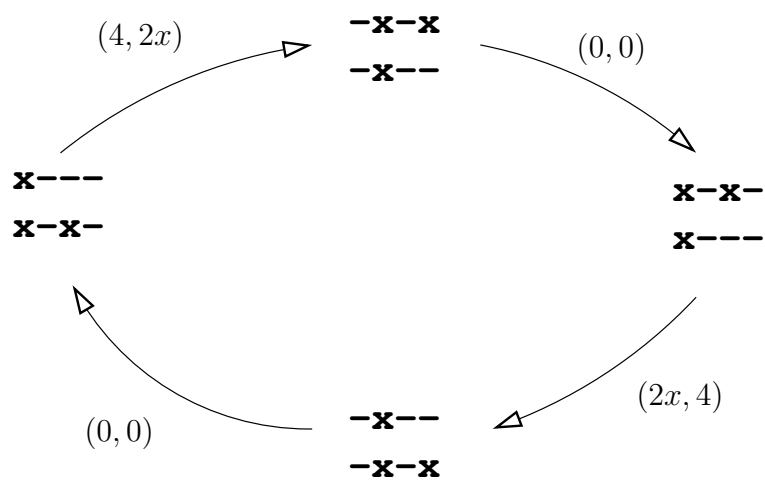
**6.10. Esimerkki.** Boksen esityksestä (1) voi päätellä, että jokainen kolmesta pallosta kulkee omaa, erillistä rataansa; radat ovat

$$\begin{pmatrix} 4_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (4, 0), (0, 0); \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0), (0, 4)$$

ja

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2_2 & 0 \\ 2_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2x, 0), (0, 2x).$$

Boksin tilasykli taas on seuraavannäköinen:



Kuva 5. Boksin tilasykli.

Myös tässä olisi voinut jättää nollasarakkeet pois, vrt. huomio 6.8.

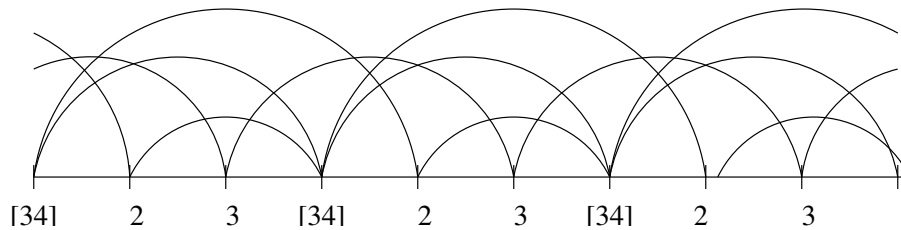
## Multiplex-kuvioista

Jotta saamme kuvattua mielivaltaisia kuvioita, on viimeinenkin rajoitus poistettava ja sallittava usemman pallon samanaikainen heittäminen kustakin kädestä. Myös tällaisille *multiplex-kuvioille* saataisiin aikaan määritelmää 6.3 vastaava funktiomääritelmä (ks. [4]), mutta määritelmä ei ole kovinkaan käyttäjäystävällinen. Kullekin pallolle tarvitaan oma funktionsa, eikä bijektiivisyyttä voida enää hyödyntää.

Sen sijaan voimme hyödyntää aikaisempia kokemuksiamme ja määrittellä multiplex-kuvion suoraan luonnollisten lukujen jonona ( $H = 1$ ) tai matriisina ( $H \geq 2$ ). Nyt “aksiomaksi” otetaan bijektiivisyyden sijasta ainoastaan oletus siitä, ettei pallojen lukumäärä muutu millään tahdilla. Toisin sanoen: joka tahdilla menneisyydestä tulevien pallojen lukumäärä on yhtä suuri kuin tulevaisuuteen lähtevien pallojen lukumäärä.

**7.1. Määritelmä.**  $H$ -kätinen multiplex-kuvio on suunnattu verkko  $G$ , jonka solmuina ovat joukon  $\mathbf{Z} \times \{1, \dots, H\}$  alkiot siten, että jokaisen solmun lähtöaste on sama kuin sen tuloaste.

Katsellaan ensin esimerkkiä tapauksesta  $H = 1$ . Näitä kuvioita kutsutaan *asynchro multiplex* -kuvioiksi.



Kuva 1. Kuvio [34]23.

Kuviota merkitään siteswap-kuvioiden tapaan [34]23 ja sen jaksonpituus on kolme. Joka kolmannella tahdilla heitetään kaksi palloa samanaikaisesti, toinen kolmen ja toinen neljän tahdin päähän. Tässä ei tarkemmin yksilöidä näitä kahta palloa, siinä mielessä kuvio ei ole yksikäsitteinen.

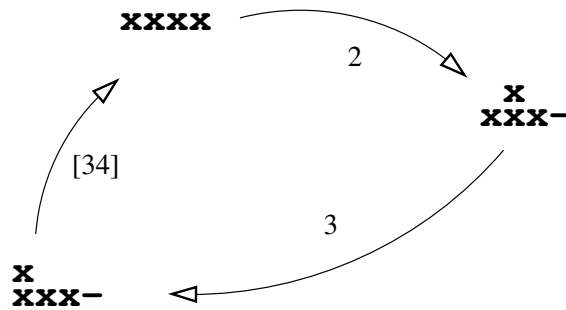
Myös tällaisille kuvioille pätevät vastaavat tulokset kuin aiemmin. Todistukset sivuutetaan, ks. [5] ja [12, luvut 3 ja 4].

**7.2. Lause.** Olkoon  $a_0, \dots, a_{n-1}$  jono, jonka alkioit ovat äärellisiä luonnollisten lukujen jonoja.<sup>1</sup> Tehdään kullekin jonolle  $a_i$  muunnos, jossa jokaiseen jonon  $a_i$  alkioon lisätään luku  $i$  ja lasketaan modulo  $n$ . Olkoon näin saatu jono  $b_0, \dots, b_{n-1}$ . Sen jokainen alkio on jono, joka sisältää lukuja väliltä  $0, \dots, n-1$ . Lasketaan nyt yhteen kaikki luvun  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  esiintymät koko jonossa  $b_0, \dots, b_{n-1}$ . (Seuraava esimerkki selventää, mitä esiintymällä tarkoitetaan.) Jos tulos on kaikille  $i$  sama kuin jonon  $b_i$  pituus, niin alkuperäinen jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  esittää asynchro multiplex -kuviota.  $\square$

**7.3. Esimerkki.** Jos  $a_0a_1a_2 = [34]23$ , niin  $b_0 = [01]$ ,  $b_1 = 0$  ja  $b_2 = 2$ , ts.  $b_0b_1b_2 = [01]02$ . Jonossa  $b_0b_1b_2$  esiintyy kaiken kaikkiaan kaksi nollaa, yksi ykkönen ja yksi kakkonen. Koska alkion  $b_0$  pituus on kaksi, alkion  $b_1$  pituus on yksi ja alkion  $b_2$  pituus on yksi, niin jono  $[34]23$  esittää asynchro multiplex -kuviota.

**7.4. Lause.** Esittäköön jono  $a_0, \dots, a_{n-1}$  asynchro multiplex -kuviota. Tällöin kuvion pallojen lukumäärä on koko jonon kaikkien lukujen summa  $n$ :llä jaettuna.  $\square$

**7.5. Esimerkki.** Kuviossa  $[34]23$  on  $(3+4+2+3)/3 = 4$  palloa. Sen tilasykli näyttää tältä:



Kuva 2. Kuvion  $[34]23$  tilasykli.

Katsellaan sitten tapausta  $H = 2$  eli *synchro multiplex* -kuvioita, näistä esimerkkinä tarkastellaan kuviota

$$\begin{pmatrix} [4_1, 4_2] & 0 & 2_1 & 0 \\ 2_2 & 0 & [4_2, 4_1] & 0 \end{pmatrix} = ([4, 4x], 2), (2, [4, 4x]).$$

<sup>1</sup>Kultakin jonolta  $a_i$  vaaditaan lisäksi, että jos sen pituus on ykköstä suurempi, se ei sisällä lainkaan nollia. Tämä on oikeutettu oletamus: esimerkiksi multiplex-heitto [30] tarkoittaa täsmälleen samaa kuin heitto 3.



Näille pätevät luvussa 6 esitetyt huomiot nollosarakkeista sekä vastaavat tulokset:

**7.6. Lause.** Olkoon  $A = (a_{ih})$  matriisi, jossa on  $n$  saraketta ja  $H$  riviä (indeksien numerointi aloitetaan ykkösestä). Olkoot  $A$ :n alkiot äärellisiä jonoja  $a_{ih}$  joukossa  $\mathbf{N} \times \{1, \dots, H\}$ .<sup>2</sup> Tehdään kullekin jonolle  $a_{ih}$  muunnos, jossa jokaiseen jonon  $a_{ih}$  ensimmäiseen komponenttiin lisätään alkio  $i$  ja lasketaan modulo  $n$ . Olkoon näin saatu matriisi  $B = (b_{ih})$ . Sen jokainen alkio  $b_{ih}$  on jono, joka sisältää joukon

$$\{0, \dots, n-1\} \times \{1, \dots, H\}$$

alkioita. Lasketaan nyt yhteen kaikki luvun

$$(i, h) \in \{0, \dots, n-1\} \times \{1, \dots, H\}$$

esiintymät koko matriisissa  $B$ . Jos tulos on kaikille  $(i, h)$  sama kuin jonon  $b_{i+1, h}$  pituus, niin alkuperäinen matriisi  $A$  esittää synchro multiplex -kuviota.  $\square$

**7.7. Esimerkki.** Kuvion  $([4, 4x], 2), (2, [4, 4x])$  matriisissa

$$A = \begin{pmatrix} [4_1, 4_2] & 0 & 2_1 & 0 \\ 2_2 & 0 & [4_2, 4_1] & 0 \end{pmatrix}$$

on esimerkiksi  $a_{11} = (4, 1), (4, 2)$ , tästä saadaan  $b_{11} = (0, 1), (0, 2)$ . Koko muunnettu matriisi on

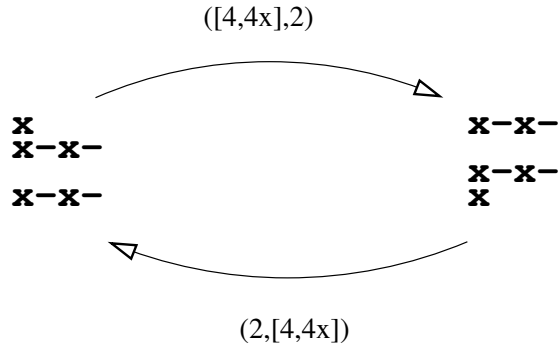
$$B = \begin{pmatrix} [0_1, 0_2] & 0 & 0_1 & 0 \\ 2_2 & 0 & [2_2, 2_1] & 0 \end{pmatrix}.$$

Siinä esiintyy kaksi kertaa alkio  $0_1$ , kerran alkio  $0_2$ , kerran alkio  $2_1$  ja kahdesti alkio  $2_2$ . Koska jonon  $b_{11}$  pituus on kaksi, jonon  $b_{12}$  pituus on yksi, jonon  $b_{31}$  pituus on yksi ja jonon  $b_{32}$  pituus on kaksi, niin  $A$  esittää synchro multiplex -kuviota.

**7.8. Lause.** Esittäköön  $n$ -sarakeinen matriisi  $A$  synchro multiplex -kuviota. Tällöin kuvion pallojen lukumäärä on koko matriisin kaikkien heittolukujen (ei käsi-indeksien) summa  $n$ :llä jaettuna.  $\square$

**7.9. Esimerkki.** Kuviossa  $([4, 4x], 2), (2, [4, 4x])$  heittolukujen summa on 20 ja  $n = 4$  (nollosarakkeet on otettava huomioon), joten kuvion pallojen lukumäärä on  $20/4 = 5$ . Tilasykli näyttää tältä:

<sup>2</sup>Jonojen alkiot ovat siis pareja  $(r, s)$ , missä  $r \in \mathbf{N}$  ja  $s \in \{1, \dots, h\}$ .



Kuva 2. Kuvion  $([4, 4x], 2), (2, [4, 4x])$  tilasykli.

(Kuvasta 2 on nollosarakkeita vastaavat tilat jätetty pois, vrt. kuva 5 luvussa 6.)

### 7.10. Esimerkkejä animaattoriin syötettäväksi.

23[43]

25[56]25

$(0, [4, 4x]), (0, 4x), (2, 4x), ([4, 4x], 0), (4x, 0), (4x, 2)$

$([4, 4x], 2), (4x, 2), (2, [4, 4x]), (2, 4x)$

$([4, 4x], 2), (2, [4, 4x])$

$([6, 6x], 2), (6x, [2, 2]), (2, [6, 6x]), ([2, 2], 6x)$

$([6, 6x], 2), (2, [6, 6x])$

**7.11. Huomio.** Kaikista synchro-kuvioista ( $H \geq 2$ ) tiedetään ylipääntään hyvin vähän. Sen sijaan asynchro multiplex -kuvioihin (eli myös tavallisiin siteswap-kuvioihin) liittyy useita hyvinkin pitkälle meneviä tuloksia, joita tässä tekstissä ei ole mainittu. Tässä yhteydessä viittaamme teksteihin [5], [13] ja [12, luku 3].

## LIITE A

### Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut

Luonnollisten lukujen joukkoa  $\{0, 1, 2, \dots\}$  merkitään symbolilla  $\mathbf{N}$  ja kokonaislukujen joukkoa  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  merkitään symbolilla  $\mathbf{Z}$ . Positiivisten kokonaislukujen joukkoa  $\{1, 2, 3, \dots\}$  merkitään symbolilla  $\mathbf{Z}_+$ .

Oleellinen luonnollisten lukujen ominaisuus on

**A.1. Pienimmän alkion periaate.** Jos  $A \subset \mathbf{N}$  on epätyhjä joukko, niin  $A$ :sta löytyy pienin alkio.  $\square$

Pienimmän alkion periaate on aksiooman asemassa. Sen kanssa yhtäpitävä periaate on

**A.2. Induktioperiaate.** Olkoon  $A \subset \mathbf{N}$  joukko, jolle

- (i)  $0 \in A$  ja
- (ii) jos  $i \in A$ , niin myös  $i + 1 \in A$ .

Tällöin  $A = \mathbf{N}$ .  $\square$

Esimerkkejä induktioperiaatteesta ja pienimmän alkion periaatteesta kohdissa 4.12, C.4 ja C.6.

**A.3. Rekursioperiaate.** Siinä missä induktioperiaate on työkalu asioiden todistamiseen, rekursioperiaate on työkalu asioiden määrittelemiseen. Esimerkki rekursioperiaatteen mukaisesta eli *rekursiivisesta* määrittelystä on summamerkinnän

$$\sum_{i=0}^n i \quad (= 0 + 1 + \dots + n)$$

tarkka määrittely:

- (i)  $\sum_{i=0}^0 i = 0$  (rajaehto)
- (ii)  $\sum_{i=0}^n i = \sum_{i=0}^{n-1} i + n$  (rekursioaskel).

*Rekursioperiaate* sanoo, että jos asia (tarkalleen ottaen funktio joukolta  $\mathbf{N}$ ) on määritelty ensin arvolla 0, niin sen jälkeen esimerkin kaltainen määritelmä (seuraava asia määritellään edellisen avulla) antaa asialle *yksikäsitteisen* määritelmän kaikille  $n \in \mathbf{N}$ .

Hieman epätavanomainen esimerkki rekursiosta kohdassa 5.8.

**A.4. Määritelmä.** Olkoon  $a, b \in \mathbf{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Luku  $a$  on *jaollinen* luvulla  $b$ , mikäli  $a = bc$  jollekin  $c \in \mathbf{Z}$ . Tätä merkitään  $b \mid a$  ja sanotaan myös, että  $b$  *jakaa*  $a$ :n tai, että  $b$  on  $a$ :n *tekijä*. Jos  $b$  ei ole  $a$ :n tekijä, merkitään  $b \nmid a$ .

Tärkeä työkalu jaollisuuden tarkastelemiseen on

**A.5. Lause (jakoyhtälö).** Jos  $a, b \in \mathbf{Z}$  ja  $b > 0$ , niin on olemassa luvut  $q, r \in \mathbf{Z}$  siten, että  $0 \leq r < b$  ja  $a = bq + r$ .

Toisin sanoen: kun positiivisella kokonaisluvulla  $b$  jakaa kokonaisluvun  $a$ , saadaan osamäärä  $q$  ja jakojäännös  $r$ , *jonka on oltava  $b$ :tä pienempi*. (Huom. jos  $r = 0$ , niin  $b \mid a$ .)

**TODISTUS.** Olkoon

$$S = \{n \in \mathbf{Z} \mid a - bn \geq 0\}.$$

Joukko  $S$  ei ole tyhjä: jos esim.  $n = -a^2$ , niin  $a - bn = a + ba^2 > 0$ , sillä  $b > 0$  ja  $a \in \mathbf{Z}$ . Näin ollen kaikkien ei-negatiivisten lukujen  $a - bn$  joukko on joukon  $\mathbf{N}$  epätyhjä osajoukko, ja siten siitä löytyy pienin alkio; olkoon se  $r = a - bq$ . Halutaan osoittaa, että  $r < b$ . Jos näin ei olisi, niin olisi  $r - b \geq 0$ . Toisaalta olisi  $r - b = a - b(q+1) < r$ , joten ei-negatiivisten lukujen  $a - bn$  joukosta löytyisi  $r$ :ää pienempi alkio  $r - b$ . Tämä on ristiriita.  $\square$

Esimerkki jakoyhtälöstä kohdassa B.7.

**A.6. Alkuluvut.** Joukon  $\mathbf{Z}$  alkio  $p > 1$  on *alkuluku*, jos  $p$ :n ainoat positiiviset tekijät ovat luvut  $p$  ja 1. Huomaa, että luku 1 ei ole alkuluku.

Voidaan osoittaa (ks. [11, kappale 2.2]), että alkulukuja on ääretön määrä ja että jokainen kokonaisluku  $a > 1$  voidaan esittää yksikäsitteisenä alkulukuesityksenä

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} \quad (k \in \mathbf{Z}_+),$$

missä luvut  $p_1, p_2, \dots$  ovat alkuluvut jossain järjestyksessä. Jos tässä  $e_i > 1$  jollekin  $i$ , niin  $p_i$  on luvun  $a$  *useampikertainen alkulukutekijä*.

Alkulukuesitystä tarvitaan liitteessä E. Loput tämän luvun kohdat viittaavat sivun 40 huomautukseen alkukuvioiden jaksonpituuden ylärajasta.

**A.7. Keskenään jaottomat luvut.** Kokonaisluvut  $a, b \in \mathbf{Z}$  ovat *keskenään jaottomia*, jos ainoastaan luku  $(\pm)1$  jakaa molemmat luvut. Luvut  $a$  ja 1 ovat keskenään jaottomia kaikilla  $a \in \mathbf{Z}$ . Jos  $a, b \neq 1$  ovat keskenään jaottomia, niin niiden alkulukuesityksissä ei esiinny samoja lukuja. Sanotaan myös, että  $a$ :lla ja  $b$ :llä *ei ole yhteisiä tekijöitä*.

**A.8. Eulerin funktio.** Olkoon  $n \geq 2$  kokonaisluku. Tällöin joukon

$$\{m \in \mathbf{Z}_+, \quad m < n \quad | \quad m \text{ ja } n \text{ ovat keskenään jaottomia}\}$$

alkioiden lukumäärää merkitään  $\varphi(n)$ . Asetetaan lisäksi  $\varphi(1) = 1$ , jolloin  $\varphi$  määrittelee funktion  $\mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$ . Esimerkiksi  $\varphi(2) = 1$ ,  $\varphi(3) = 2$ ,  $\varphi(4) = 2$ ,  $\varphi(5) = 4$ .

**A.9. Suurin yhteinen tekijä.** Kahden kokonaisluvun  $a, b \in \mathbf{Z}$  *suurin yhteinen tekijä* on luku  $c \geq 1$  (merkitään  $c = \text{syt}(a, b)$ ) siten, että

(1)  $c \mid a, c \mid b$

(2) jos  $d \mid a, d \mid b$  jollekin  $d \geq 1$ , niin  $d \mid c$ .

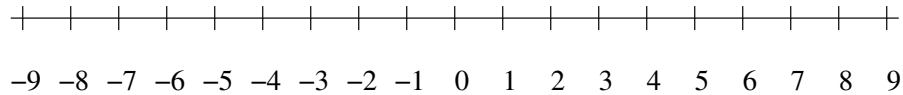
Ehto (1) sanoo, että  $c$  on sekä  $a$ :n että  $b$ :n tekijä. Ehto (2) sanoo, että  $c$ :tä suurempaa yhteistä tekijää ei löydy.



## LIITE B

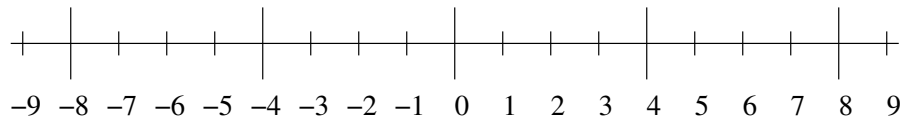
### Kokonaislukujen jäännösluokat modulo $n$

Kokonaislukujen joukkoa  $\mathbf{Z}$  voi havainnollistaa lukusuoralla:



Kuva 1. Lukusuora.

Usein on tarpeellista jakaa kokonaisluvut  $n$ :n pituisiin jaksoihin, alla  $n = 4$ :



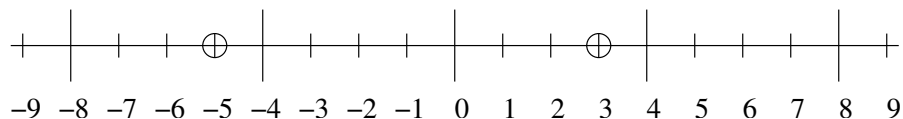
Kuva 2. Jaksotettu lukusuora.

**B.1. Määritelmä.** Jaettaessa kokonaisluvut  $n$ :n pituisiin jaksoihin, joukko  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  muodostaa aina yhden jakson, ns. *perusjakson modulo  $n$* . Tässä “modulo  $n$ ” kertoo jaksonpituuden ja jätetään usein pois, mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole.

**B.2. Määritelmä.** Joukon  $\mathbf{Z}$  *jakso (modulo  $n$ )* on  $n$ -alkioinen joukko  $\{kn, kn + 1, kn + 2, \dots, kn + (n - 1)\}$ , missä  $k \in \mathbf{Z}$ .

**B.3. Määritelmä.** Kahden luvun  $a, b \in \mathbf{Z}$  sanotaan olevan *kongruentit (modulo  $n$ )*, mikäli ne ovat samassa vaiheessa jaksoa eli mikäli niiden etäisyys on luvun  $n$  monikerta, ts.  $b = a + kn$  jollekin  $k \in \mathbf{Z}$ . Tätä merkitään lyhyesti  $a \equiv_n b$  tai pelkästään  $a \equiv b$ , mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole.

Alla  $-5 \equiv_4 3$ , sillä  $3 = -5 + 2 \cdot 4$ :



Kuva 3.  $-5 \equiv_4 3$ .

**Huomio.** Luvut ovat kongruentit (modulo  $n$ ), mikäli niille saadaan  $n$ :llä jaettaessa samat jakojäännökset.

**B.4. Lause.** Olkoot  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$  ja  $n \in \mathbf{Z}_+$ .

- (i) Jos  $a \equiv_n b$ , niin  $b \equiv_n a$ .
- (ii) Jos  $a \equiv_n b$  ja  $b \equiv_n c$ , niin  $a \equiv_n c$ .
- (iii) Jos  $a \equiv_n b$  ja  $c \equiv_n d$ , niin  $a + c \equiv_n b + d$ .
- (iv) Jos  $a \equiv_n b$  ja  $c \equiv_n d$ , niin  $ac \equiv_n bd$ .

TODISTUS. Todistus on suoraviivainen; todistetaan malliksi kohta (ii). Jos  $a \equiv_n b$  ja  $b \equiv_n c$ , niin  $b = a + kn$  ja  $c = b + ln$  jollekin  $k, l \in \mathbf{Z}$ . Tällöin  $c = b + ln = (a + kn) + ln = a + (k + l)n$ , eli  $a \equiv_n c$ . Muut kohdat samaan tapaan.  $\square$

**B.5. Määritelmä.** Luvun  $a \in \mathbf{Z}$  jäännösluokka (modulo  $n$ ) on joukko  $[a]_n := \{t \in \mathbf{Z} \mid t \equiv_n a\}$ . Alkioita  $t \in [a]_n$  sanotaan luokan  $[a]_n$  edustajiksi.

Luvun  $a$  jäännösluokka siis sisältää kaikki luvun  $a$  kanssa kongruentit luvut. Esimerkiksi  $[-1]_4 = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$  (vrt. kuva 2).

**B.6. Lause.** Olkoot  $n \in \mathbf{Z}_+$  ja  $a, b \in \mathbf{Z}$ ,  $a \neq b$ . Tällöin jäännösluokat  $[a]_n$  ja  $[b]_n$  joko yhtyvät tai ovat erillisiä, ts. joko  $[a] = [b]$  tai  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .

TODISTUS. Tehdään antiteesi:  $[a]$  ja  $[b]$  eivät yhdy eivätkä ole erillisiä. Koska joukot eivät yhdy, löytyy alkio  $i \in \mathbf{Z}$ , joka kuuluu ainoastaan toiseen joukkoon; olkoon se  $[a]$ . Koska joukot eivät ole erillisiä, löytyy alkio  $j \in \mathbf{Z}$ , joka kuuluu molempiin joukkoihin.

Siispä  $i \equiv a$  ja  $j \equiv a$ ,  $j \equiv b$ . Koska  $i \equiv a$  ja  $a \equiv j$ , niin  $i \equiv j$  ja edelleen, koska  $j \equiv b$ , niin  $i \equiv b$ . Tämä on ristiriita, koska  $i$  ei kuulunut joukkoon  $[b]$ .

(Tässä sovellettiin kerran lausetta B.4(i) ja kahdesti lausetta B.4(ii).)  $\square$

**B.7. Lause.** Jokaiselle  $t \in \mathbf{Z}$  pätee  $t \equiv_n i$  jollekin  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ .

TODISTUS. Halutaan osoittaa, että  $t = kn + i$  jollekin  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ . Tulos saadaan suoraan jakoyhtälöstä, kun  $t$  jaetaan  $n$ :llä.  $\square$

**B.8. Merkintä.** Joukkoa, jonka alkioina ovat joukon  $\mathbf{Z}$  kaikki jäännösluokat modulo  $n$ , merkitään  $\mathbf{Z}_n$ . Toisin sanoen  $\mathbf{Z}_n = \{[t]_n \mid t \in \mathbf{Z}\}$ .



**B.9. Huomio.** Lauseiden B.6 ja B.7 nojalla jäännösluokat (modulo  $n$ ) jakavat joukon  $\mathbf{Z}$   $n$ :ään erilliseen luokkaan  $[0], \dots, [n-1]$ . Toisin sanoen  $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ ,  $[0] \cup [1] \cup \dots \cup [n-1] = \mathbf{Z}$  ja  $[0] \cap [1] \cap \dots \cap [n-1] = \emptyset$ .

Koska luokkien  $[t] \in \mathbf{Z}_n$  ja edustajien  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  välillä on yksikäsitteinen vastaavuus, voidaan joukko  $\mathbf{Z}_n$  samaistaa joukkoon  $\{0, \dots, n-1\}$ . Mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole, näin yleensä tehdään ja esim. jäännösluokan  $[1]$  asemesta puhutaan jäännösluokasta 1.

**B.10. Yhteenlasku modulo  $n$ .** Olkoot  $a, b \in \mathbf{Z}$  ja  $n \in \mathbf{Z}_+$ . Ilmaissulla ' $a + b$  laskettuna modulo  $n$ ' tarkoitetaan luokan  $[a + b]$  edustajaa joukosta  $\{0, \dots, n-1\}$ .

**B.11. Hyvinmäärittelystä.** Määriteltäessä funktiota joukkoon  $\mathbf{Z}_n$  on pidettävä huolta siitä, että funktion arvo ei riipu jäännösluokan edustajasta eli siitä, että funktio on *hyvinmääritetty*. Ellei funktio ole hyvinmääritetty, se ei ole funktio lainkaan. Esimerkiksi "funktio"  $f : \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $f([t]) = t$ , ei ole hyvinmääritetty, sillä  $f([t+n]) \neq f([t])$ , vaikka  $[t+n] = [t]$ . Sen sijaan funktio  $f : \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_n$ ,  $f([t]) = [2t]$  on hyvinmääritetty Lauseen B.4(iv) nojalla: jos  $[a] = [b]$  (eli  $a \equiv b$ ), niin myös  $[2a] = [2b]$  (eli  $2a \equiv 2b$ ), sillä selvästi  $2 \equiv 2$ .



## Äärellisten joukkojen permutaatiot

Permutaatio (eng. *permutation*) merkitsee järjestyksen vaihtoa. Permutaatioita varten tarvitaan joukko, jonka alkioiden järjestystä vaihdellaan. Oletetaan, että tämä joukko on äärellinen.

**C.1. Määritelmä.** Joukko  $A$  on *äärellinen*, jos jollekin  $n \in \mathbf{Z}_+$  on olemassa bijektio  $f : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow A$ . Tällöin joukon  $A$  *alkioiden lukumäärä* on  $n$ .

Äärellinen joukko  $A$  voidaan siis aina samaistaa muotoa  $\{0, \dots, n-1\}$  olevaan joukkoon. Samaistus ilmaistaan usein lyhyesti kirjoittamalla  $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ .

**C.2. Määritelmä.** Äärellisen joukon  $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$  *permutaatio* on bijektiivinen kuvaus  $\phi : A \rightarrow A$ . Permutaatio esitetään muodossa  $\phi = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \phi(a_0) & \phi(a_1) & \dots & \phi(a_{n-1}) \end{pmatrix}$ .

**Esimerkki.** Joukon  $\{0, 1, 2\}$  eräs permutaatio on  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , toinen on  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**C.3. Huomio.** Mikäli permutoitava joukko on  $\{0, \dots, n-1\}$ , niin esityksen  $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \phi(0) & \phi(1) & \dots & \phi(n-1) \end{pmatrix}$  ylempi rivi on turha. Tässä tapauksessa permutaatio esitetäänkin usein jonomuodossa  $\phi = \phi(0), \phi(1), \dots, \phi(n-1)$ . Jos  $n \leq 10$ , voidaan myös pilkut jättää pois. Näin siis  $102 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  ja  $201 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**C.4. Lause.** Joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  permutaatioita on  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  kpl, missä  $0! = 1$ .

**TODISTUS.** Induktio: yksialkioisen joukon  $\{0\}$  permutaatioita on selvästi  $0! = 1$  kpl. Oletetaan, että  $(n-1)$ -alkioisen joukon  $\{0, \dots, n-2\}$  permutaatioita on  $(n-1)!$  kpl. Kustakin tällaisesta permutaatiosta saadaan  $n-1$  kappaletta joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  permutaatiota, kun alkioita  $n-1$  asetetaan permutaation eri väleihin.<sup>1</sup> Siispä joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  permutaatioiden lukumäärä on  $(n-1)! \cdot n = n!$ .  $\square$

<sup>1</sup>Tämä tehdään tarkasti lauseen D.5 todistuksessa.

**Esimerkki.** Joukon  $\{0, 1, 2\}$  permutaatioita on  $3! = 6$  kpl. Nämä ovat 012, 021, 102, 120, 201 ja 210.

**Huomio.** Lauseen C.4 ja määritelmän C.1 nojalla minkä tahansa  $n$ -alkioisen joukon permutaatioiden lukumäärä on  $n!$ .

**C.5. Merkintä.** Joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  kaikkien permutaatioiden joukkoa merkitään symbolilla  $S_n$ . Siis

$$S_n = \{\phi : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\} \mid \phi \text{ on bijektio}\}.$$

Lauseen C.4 nojalla joukossa  $S_n$  on  $n!$  alkioita.

**C.6. Määritelmä.** Olkoon  $\phi$  äärellisen joukon  $A$  permutaatio ja  $a \in A$ . Alkion  $a$  *kertaluku* permutaatiossa  $\phi$  on pienin luku  $m \in \mathbf{Z}_+$ , jolle  $\phi^m(a) = a$ .

Tällainen luku löytyy ja on yksikäsitteinen: koska  $A$  on äärellinen, niin alkiot  $\phi^k(a)$  eivät voi olla eri alkioita kaikilla  $k \in \mathbf{Z}_+$ . Löytyy siis ainakin kaksi eri lukua  $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}_+$  (voidaan olettaa  $k_1 > k_2$ ) siten, että  $\phi^{k_1}(a) = \phi^{k_2}(a)$ , ts.  $\phi^{k_1-k_2}(a) = a$  (permutaatio on aina bijektio). Siis joukko

$$\{m \in \mathbf{Z}_+ \mid \phi^m(a) = a\} \subset \mathbf{N}$$

on epätyhjä, joten siitä löytyy pienin alkio.

**C.7. Esimerkki.** Olkoon  $\phi = 451302$  joukon  $\{0, \dots, 5\}$  permutaatio. Tällöin  $\phi(1) = 5$ ,  $\phi^2(1) = \phi(5) = 2$  ja  $\phi^3(1) = \phi(2) = 1$ . Siispä 3 on alkion 1 kertaluku permutaatiossa  $\phi$ . (Myös alkioiden 5 ja 2 kertaluku on 3.)

**C.8. Määritelmä.** Olkoon  $\phi$  äärellisen joukon  $A$  permutaatio ja olkoon  $a \in A$ . Alkion  $a$  *sykli* permutaatiossa  $\phi$  on joukko

$$\{a, \phi(a), \phi^2(a), \dots, \phi^{m-1}(a)\},$$

missä  $m$  on alkion  $a$  kertaluku permutaatiossa  $\phi$ .

**Huomio.** Sykli mielletään usein järjestetyksi joukoksi, jossa seuraava alkio saadaan edellisestä kuvauksella  $\phi$ . Sykli myös kirjoitetaan siten, ettei tätä järjestystä rikota. Sykli kuitenkin määritellään järjestämättömänä joukkona, sillä järjestysinformaatio saadaan joka tapauksessa kuvauksesta  $\phi$ .

**C.9. Esimerkki.** Olkoon  $\phi$  kuten esimerkissä C.7. Tällöin alkion 1 sykli permutaatiossa  $\phi$  on joukko  $\{1, 5, 2\}$ . (Tämä on myös alkioiden 5 ja 2 sykli permutaatiossa  $\phi$ .)

**C.10. Lause.** Olkoon  $\phi$  äärellisen joukon  $A$  permutaatio ja olkoot  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ . Tällöin alkioiden  $a$  ja  $b$  syklit permutaatioissa  $\phi$  joko yhtyvät tai ovat erillisiä (vrt. Lause B.6).

**TODISTUS.** Tehdään antiteesi: alkioiden  $a$  ja  $b$  syklit eivät yhdy eivätkä ole erillisiä. Koska syklit eivät yhdy, niin löytyy alkio  $i \in A$ , joka kuuluu ainoastaan toiseen sykliin; olkoon se alkion  $a$  sykli. Koska syklit eivät ole erillisiä, niin löytyy myös alkio  $j \in A$ , joka kuuluu molempiin sykleihin.

Toisin sanoen löytyy  $k \in \mathbf{Z}$  siten, että  $\phi^k(a) = i$ , sekä  $l, m \in \mathbf{Z}$  siten, että  $\phi^l(a) = j$  ja  $\phi^m(b) = j$ . Tällöin kuitenkin  $\phi^{k+m-l}(b) = i$ , mikä on ristiriita, koska  $i$  ei kuulunut alkion  $b$  sykliin.  $\square$

Äärellisen joukon  $A$  permutaatio siis jakaa  $A$ :n alkiot erillisiin sykleihin. Permutaatio voidaan nyt esittää ns. *sykliesityksenä*, jossa permutaation syklit ovat peräkkäin tavallisin suluin erotettuina. Sykliin järjestykseen ei yleensä kiinnitetä huomiota, eikä sykliesitys näin ollen ole yksikäsitteinen.

**C.11. Esimerkki.** Edellisten esimerkkien permutaation  $\phi = 451302$  syklit ovat  $\{1, 5, 2\}$ ,  $\{0, 4\}$  ja  $\{3\}$ . Näin ollen sykliesitykseksi kelpaa esim.  $\phi = (1, 5, 2)(0, 4)(3)$  tai  $\phi = (4, 0)(3)(2, 1, 5)$ .

**Huomio.** Jos permutoitavassa joukossa  $\{0, \dots, n-1\}$  on  $n \leq 10$ , sykliesityksestäkin voidaan jättää pilkut pois. Edellä siis  $\phi = (152)(04)(3)$ .



## LIITE D

### Eulerin luvut

Jatkossa merkitsemme joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  yleistä permutaatiota  $\phi = \phi(0), \dots, \phi(n-1)$  helpommassa muodossa  $\phi = \phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ .

**D.1. Määritelmä.** Olkoon  $n \in \mathbf{Z}_+$  ja  $\phi$  joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  permutaatio. Alkio  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$  on permutaation  $\phi$  *laskukohta*, jos  $\phi_i > \phi_{i+1}$ . Jos taas  $\phi_i < \phi_{i+1}$ , niin  $i$  on permutaation  $\phi$  *nousukohta*.

**D.2. Määritelmä.** Eulerin luku  $\langle \binom{n}{k} \rangle$ , missä  $0 \leq k \leq n$ , ilmaisee niiden joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  permutaatioiden lukumäärän, joissa on täsmälleen  $k$  laskukohtaa.

Eulerin luvuilla on samankaltaisia ominaisuuksia kuin binomikertoimilla  $\binom{n}{k}$ . Nämä todistetaan kahdessa seuraavassa lauseessa.

**D.3. Lause.**  $\langle \binom{n}{0} \rangle = 1$ ,  $\langle \binom{n}{n-1} \rangle = 1$  ja jos  $n > 0$ , niin  $\langle \binom{n}{n} \rangle = 0$ .

**TODISTUS.** Ainoa permutaatio, jossa ei ole laskukohtia, on identtinen permutaatio  $0, 1, \dots, n-1$ . Ainoastaan identtisen permutaation “peilikuvassa”  $n-1, n-2, \dots, 0$  on  $n-1$  laskukohtaa, eikä tämän useampia laskukohtia voi olla.  $\square$

**D.4. Sopimus.** Laajennamme merkinnän  $\langle \binom{n}{k} \rangle$  kaikille  $k \in \mathbf{Z}$  asettamalla  $\langle \binom{n}{k} \rangle = 0$ , kun  $k < 0$  tai  $k > n$ .

**D.5. Lause.** Kun  $0 \leq k < n$ , pätee

$$(i) \quad \langle \binom{n}{k} \rangle = \langle \binom{n}{n-1-k} \rangle \text{ ja}$$

$$(ii) \quad \langle \binom{n}{k} \rangle = (k+1) \langle \binom{n-1}{k} \rangle + (n-k) \langle \binom{n-1}{k-1} \rangle.$$

**TODISTUS.** Yhtälö (i) seuraa helposti: permutaatiossa  $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$  on  $k$  laskukohtaa, jos ja vain jos  $\phi$ :n peilikuvassa  $\phi_{n-1}, \dots, \phi_0$  on  $n-1-k$  laskukohtaa.

Yhtälö (ii) todistetaan muodossa  $\langle \binom{n+1}{k} \rangle = (k+1) \langle \binom{n}{k} \rangle + (n-k+1) \langle \binom{n}{k-1} \rangle$ . Olkoon  $\phi = \phi_0, \dots, \phi_{n-1}$  joukon  $\{0, \dots, n-1\}$  permutaatio. Valitaan

$i \in \{0, 1, \dots, n\}$  ja määritellään joukon  $\{0, 1, \dots, n\}$  permutaatio  $\phi'$  seuraavasti:

$$\phi'(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{jos } t < i \\ n, & \text{jos } t = i \\ \phi(t-1), & \text{jos } t > i. \end{cases}$$

(Alkio  $n$  siis laitetaan permutaation  $\phi$  “ $i$ :nnteen väliin”. Harjoitustehtäväksi jää todistaa, että  $\phi'$  todella on permutaatio.)

Oletetaan, että alkio  $n$  laitetaan permutaation  $\phi$  väliin  $i$ , missä  $0 \leq i \leq n$ . Tällöin uudessa permutaatiossa

$$\phi' = \phi_0, \dots, \phi_{i-1}, n, \phi_i, \dots, \phi_{n-1}$$

on

- saman verran laskukohtia kuin permutaatiossa  $\phi$ , mikäli  $i = n$  tai mikäli  $i - 1$  on  $\phi$ :n laskukohta
- yksi laskukohta enemmän kuin permutaatiossa  $\phi$ , mikäli  $i = 0$  tai mikäli  $i - 1$  ei ole  $\phi$ :n laskukohta.

Jos siis permutaatiossa  $\phi$  on  $k$  laskukohtaa, niin alkio  $n$  voidaan lisätä  $k + 1$  tavalla siten, että myös uudessa permutaatiossa  $\phi'$  on  $k$  laskukohtaa. Jos taas permutaatiossa  $\phi$  on  $k - 1$  laskukohtaa, niin alkio  $n$  voidaan lisätä  $n - k + 1$  tavalla siten, että uudessa permutaatiossa  $\phi'$  on  $k$  laskukohtaa. Väite seuraa.  $\square$

**D.6. Huomio.** Lause D.5(i) todistaa, että Eulerin luku  $\langle \binom{n}{k} \rangle$  ilmaisee myös niiden joukon  $\{0, \dots, n - 1\}$  permutaatioiden lukumäärän, joissa on täsmälleen  $k$  nousukohtaa.

Tärkeä ja yllättävä Eulerin lukujen ominaisuus on ns. *Worpitzkyn kaava*, joka yhdistää potenssit, binomikertoimet ja Eulerin luvut. Kaavan todistukseen tarvitaan aritmeettinen temppu, joka todistetaan erillisenä Lemmana. Lemman todistuksessa puolestaan käytetään tunnettuja binomikertoimien kaavoja  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  ja  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ , jotka voidaan helposti todistaa suoraan määritelmästä  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**D.7. Lemma.** Olkoot  $a, k, n \in \mathbf{N}$ . Tällöin

$$a \binom{a+k}{n} = (k+1) \binom{a+k}{n+1} + (n-k) \binom{a+k+1}{n+1}.$$



TODISTUS.

$$\begin{aligned}
& a \binom{a+k}{n} \\
&= (a+k) \binom{a+k}{n} - k \binom{a+k}{n} \\
&= (a+k) \left( \binom{a+k-1}{n} + \binom{a+k-1}{n-1} \right) - k \binom{a+k}{n} \\
&= (a+k) \binom{a+k-1}{n} + (a+k) \binom{a+k-1}{n-1} - k \binom{a+k}{n} \\
&= (n+1) \binom{a+k}{n+1} + n \binom{a+k}{n} - k \binom{a+k}{n} \\
&= n \left( \binom{a+k}{n+1} + \binom{a+k}{n} \right) + \binom{a+k}{n+1} - k \binom{a+k}{n} \\
&= n \binom{a+k+1}{n+1} + \binom{a+k}{n+1} - k \binom{a+k}{n} \\
&= n \binom{a+k+1}{n+1} + \binom{a+k}{n+1} + k \left( \binom{a+k}{n+1} - \binom{a+k+1}{n+1} \right) \\
&= (k+1) \binom{a+k}{n+1} + (n-k) \binom{a+k+1}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

**D.8. Lause (Worpitzky).** Olkoon  $a \in \mathbf{N}$  ja  $n \geq 1$ . Tällöin

$$a^n = \sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle_k \binom{a+k}{n}.$$

TODISTUS. Induktio. Lause pätee arvolla  $n = 1$ , sillä  $\langle 0 \rangle_0 \binom{a}{1} = 1 \cdot a = a$ . Nyt  $a^{n+1} = a \cdot a^n$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle_k a \binom{a+k}{n} \\
& \stackrel{2)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \langle n \rangle_k \binom{a+k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \langle n \rangle_k \binom{a+k+1}{n+1} \\
& \stackrel{3)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \langle n+1 \rangle_k \binom{a+k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \langle n \rangle_k \binom{a+k+1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-(k-1)) \langle n \rangle_{k-1} \binom{a+(k-1)+1}{n+1} \\
& \stackrel{4)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \langle n+1 \rangle_k \binom{a+k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \langle n \rangle_k \binom{a+k+1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n-2} (n-k) \langle n \rangle_k \binom{a+k+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \langle n+1 \rangle_k \binom{a+k}{n+1} + (n-(n-1)) \langle n \rangle_{n-1} \binom{a+(n-1)+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \langle n+1 \rangle_k \binom{a+k}{n+1} + \langle n+1 \rangle_n \binom{a+n}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^n \langle n+1 \rangle_k \binom{a+k}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Yhtälö 1) on induktio-oletus. Yhtälössä 2) sovelletaan Lemmaa D.7 ja yhtälössä 3) Lausetta D.5(ii). Yhtälö 4) seuraa siitä, että  $0 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow -1 \leq k-1 \leq n-2$  ja siitä, että  $\langle \binom{n}{-1} \rangle = 0$ .

Worpitzkyn kaava pätee myös, kun  $a$  on reaaliluku (myös binomikerroin voidaan laajentaa reaalilukuihin). Laajemmin Eulerin luvuista teoksessa [6].

## LIITE E

### Möbiusinversio

**E.1. Määritelmä.** Möbiusfunktio  $\mu : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  määritellään seuraavasti: olkoon  $n \in \mathbf{Z}_+$  ja olkoon  $n$ :n alkulukuesitys

$$(3) \quad n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \mu(n) &= 1, & \text{jos } n &= 1, \\ \mu(n) &= 0, & \text{jos } e_i &> 1 \text{ jollekin } i, \\ \mu(n) &= (-1)^k, & \text{jos } e_i &= 1 \text{ kaikilla } i. \end{aligned}$$

Toisin sanoen  $\mu(n) = 0$ , jos  $n$ :llä on useampikertaisia alkulukutekijöitä ja muussa tapauksessa  $\mu(n) = \pm 1$  sen mukaan, onko  $n$ :n alkulukutekijöiden lukumäärä parillinen vai pariton.

**E.2. Lemma.** Olkoon  $n \in \mathbf{Z}_+$ . Tällöin

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n = 1 \\ 0, & \text{jos } n > 1, \end{cases}$$

missä summataan yli  $n$ :n kaikkien positiivisten tekijöiden  $d$ .

TODISTUS. Jos  $n = 1$ , niin  $d = 1$  ja  $\mu(d) = 1$ . Jos  $n > 1$  ja  $n$ :n alkulukuesitys on kuten kohdassa (1), kirjoitetaan  $n^* = p_1 p_2 \cdots p_k$ . Jos nyt  $d | n$  ja  $d \nmid n^*$ , niin  $d$ :llä on useampikertaisia alkulukutekijöitä ja  $\mu(d) = 0$ . Siispä

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n^*} \mu(d).$$

Koska  $k$ :sta alkuluvusta voidaan  $i$ :n alkuluvun tulo muodostaa  $\binom{k}{i}$  tavalla ja koska mikä tahansa tällainen tulo on luvun  $n$  tekijä, pätee

$$\sum_{d|n^*} \mu(d) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i 1^{k-i} = (-1 + 1)^k = 0.$$

(Ensimmäisessä yhtäsuuruudessa  $i = 0$  vastaa tekijää 1 ja viimeinen yhtäsuuruus seuraa binomikaavasta  $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = (x + y)^k$ .)  $\square$

**E.3. Lause (Möbiusinversio).** Olkoot  $f$  ja  $g$  funktioita  $\mathbf{Z}_+ \rightarrow A$ , missä  $A$  on yhteenlaskulla varustettu joukko (esim.  $\mathbf{Z}$ ). Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

$$(i) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+$$

$$(ii) \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(n/d) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+.$$

TODISTUS. (i)  $\Rightarrow$  (ii): Koska

$$f(n/d) = \sum_{m|(n/d)} g(m) \quad \text{kaikilla } d | n,$$

niin

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(n/d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{m|(n/d)} g(m),$$

ja edelleen

$$\sum_{d|n} \mu(d) \sum_{m|(n/d)} g(m) = \sum_{dm|n} \mu(d)g(m) = \sum_{m|n} g(m) \sum_{d|(n/m)} \mu(d).$$

Mutta Lemman E.2 mukaan

$$\sum_{d|(n/m)} \mu(d) = 0$$

paitsi silloin, kun  $m = n$ , joten kaiken kaikkiaan saadaan

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(n/d) = g(n),$$

mikä oli todistettava.

Kohta (ii)  $\Rightarrow$  (i) todistetaan täysin vastaavasti.

□

Möbiusinversiota käytetään luvussa 4, lisää esimerkkejä teoksessa [7].

## LIITE F

### Verkkoteorian terminologiaa

**F.1. Määritelmä.** *Suunnattu verkko* koostuu äärellisestä joukosta  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  (*solmujen joukko*, eng. vertex set) ja joukosta  $E \subset V \times V$  (*nuolien joukko*, eng. edge set). Jos  $(v_1, v_2) \in E$ , niin sanotaan, että solmusta  $v_1$  kulkee nuoli solmuun  $v_2$ .

**F.2. Määritelmä.** Olkoon  $(V, E)$  suunnattu verkko ja  $v \in V$  eräs solmu. Solmulle  $v$  määritellään *tuloaste* joukon

$$\{u \in V \mid (u, v) \in E\}$$

alkioiden lukumääränä ja vastaavasti *lähtöaste* joukon

$$\{w \in V \mid (v, w) \in E\}$$

alkioiden lukumääränä. Toisin sanoen solmun  $v$  tuloaste on niiden nuolien lukumäärä, jotka päättyvät solmuun  $v$ , ja solmun  $v$  lähtöaste on niiden nuolien lukumäärä, jotka lähtevät solmusta  $v$ .

**F.3. Määritelmä.** *Kävely* verkolla  $(V, E)$  on jono solmuja  $v_0, \dots, v_k$  siten, että  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  kaikilla  $i = 0, \dots, k - 1$ . Kävely  $v_0, \dots, v_k$  on *suljettu*, jos  $v_0 = v_k$ . Suljettu kävely puolestaan on *sykli*, jos  $v_i \neq v_j$  aina, kun  $i \neq j$ .

Kävely on siis jono solmuja siten, että solmusta seuraavaan pääsee nuolella. Kävely on suljettu, jos viimeinen solmu on sama kuin ensimmäinen. Sykli on suljettu kävely, mutta suljettu kävely ei välttämättä ole sykli. Jos suljettu kävely ei ole sykli, se koostuu useammasta syklistä.



## Kirjallisuutta

- [1] Ben Beever. *Siteswap Ben's Guide to Juggling Patterns*. Omakustannekirja, 2000. Internet-versio saatavissa osoitteesta <http://www.jugglingdb.com/articles/index.php?id=33>.
- [2] Jack Boyce. *The Longest Prime Siteswap Patterns*. Julkaisematon teksti, 1999. Saatavissa osoitteesta <http://sonic.net/~boyce/prime.html>.
- [3] Joe Buhler, David Eisenbud, Ronald Graham ja Colin Wright. Juggling drops and descents. *Amer. Math. Monthly*, 101:507–519, 1994.
- [4] Ed Carstens. *The Mathematics of Juggling*. Julkaisematon teksti, 1992. Saatavissa osoitteesta <http://www.juggling.org/papers/carstens>.
- [5] Richard Ehrenborg ja Margaret Readdy. Juggling and applications to q-analogues. *Discrete Mathematics*, 157:107–125, 1996.
- [6] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth ja Oren Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1989.
- [7] Marshall Hall Jr. *Combinatorial Theory, 2nd ed.* Wiley, 1986.
- [8] Lute Kamstra. Juggling polynomials. Tekninen raportti, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 2001. Saatavissa osoitteesta <http://ftp.cwi.nl/CWIreports/PNA/PNA-R00113.pdf>.
- [9] Allen Knutson. *Siteswap FAQ 2.0*. Internet-julkaisu, 1993. Saatavissa osoitteesta <http://www.juggling.org/help/siteswap/faq.html>.
- [10] Jorma Merikoski, Ari Virtanen ja Pertti Koivisto. *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* (moniste). Tampereen yliopisto, matematiikan laitos, 2002.
- [11] P.M.Cohn. *Algebra Vol.1, 2nd ed.* Wiley, 1995.
- [12] Burkard Polster. *The Mathematics of Juggling*. Springer, 2003.
- [13] Jonathan D. Stadler. Juggling and vector compositions. *Discrete Mathematics*, 258:179–191, 2002.
- [14] Bruce Tiemann ja Bengt Magnusson. The physics of juggling. *Physics Teacher*, 27:584–589, 1989.