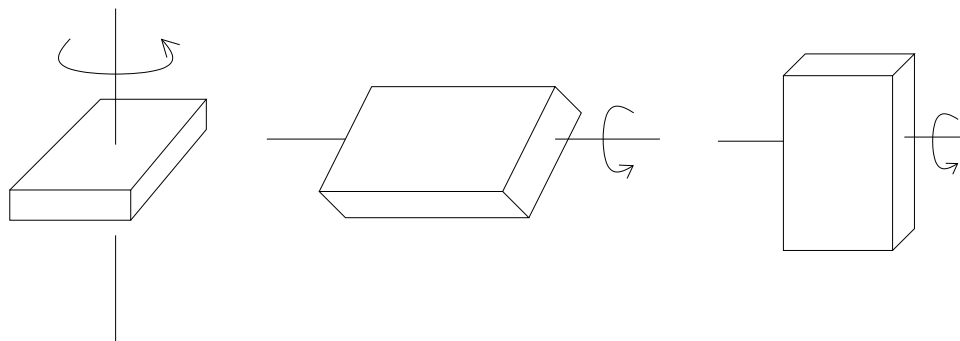


VAKAA JA EPÄVAKAA PYÖRIMINEN

HARRI VARPANEN

1. JOHDANTO

Ottakaa käteenne sellainen kirja, kansio tai muu suorakulmaisen särmiön muotoinen kappale, joka ei aukea ilmaan heitettäessä (sitokaa tarvittaessa tavallinen kirja narulla kiinni) ja joka sietää mahdollisesta maahan putoamisesta aiheutuvat kolhut. Heitelkää kappaletta ilmaan, kunnes havaitsette seuraavan ilmiön.

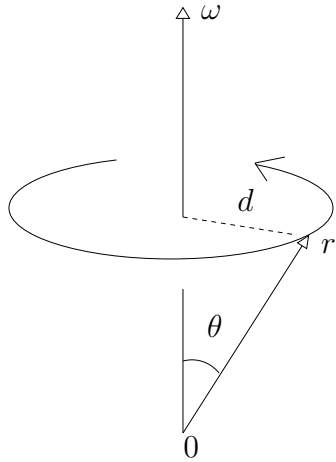


Kuva 1. Kappale pyörii vakaasti lyhimmän ja pisimmän akselin ympäri (kaksi ensimmäistä kuvaa), mutta epävakaasti keskimmäisen akselin ympäri (viimeinen kuva).

Ilmiö on fyysikoille tuttu, mutta alla ilmiötä pyritään selventämään matemaatikon näkökulmasta. Teksti on mukaeltu käännös artikkelista [1].

2. PYÖRIVÄ PISTE

Tarkastelkaamme avaruuden \mathbb{R}^3 pistettä r , joka pyörii origon kautta kulkevan akselin ympäri kulmanopeudella ω .



Kuva 2. Piste r pyörii origon kautta kulkevan akselin ympäri kulmanopeudella ω .

Pisteen r rata on ympyrä, jonka säde on $d = |r| \sin \theta$. Yhteen kierrokseen kuluva aika on $T = 2\pi/|\omega|$, joten pisteen ratavauhti on $2\pi d/T = |\omega||r| \sin \theta = |\omega \times r|$. Huomioimalla myös ratanopeuden suunta, saadaan

$$(1) \quad \frac{dr}{dt} = \omega \times r.$$

Jos asetamme pisteelle r vakiomassan m , niin pisteen liikemäärä on $p = mv = m \frac{dr}{dt} = m\omega \times r$ ja pisteen pyörimismäärä on

$$L = r \times p = mr \times (\omega \times r).$$

Lasketaan viimeinen ristitulo auki standardikannassa $\{i, j, k\}$ muistisäännöllä

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix},$$

toisin sanoen

$$(\omega \times r)_1 = \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2,$$

$$(\omega \times r)_2 = - \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix} = \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3,$$

$$(\omega \times r)_3 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1.$$

Samoin jäljellä olevalle ristitulolle pätee

$$r \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ (\omega \times r)_1 & (\omega \times r)_2 & (\omega \times r)_3 \end{vmatrix}.$$

Tämän i -koordinaatti on

$$\begin{aligned} & r_2(\omega \times r)_3 - r_3(\omega \times r)_2 \\ &= r_2(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) + r_3(\omega_1 r_3 - \omega_3 r_1) \\ &= (r_2^2 + r_3^2)\omega_1 + (-r_1 r_2)\omega_2 + (-r_1 r_3)\omega_3. \end{aligned}$$

Samoin saadaan j -koordinaatiksi

$$(-r_1 r_2)\omega_1 + (r_1^2 + r_3^2)\omega_2 + (-r_2 r_3)\omega_3$$

ja k -koordinaatiksi

$$(-r_1 r_3)\omega_1 + (-r_2 r_3)\omega_2 + (r_1^2 + r_2^2)\omega_3.$$

Yhteenvedettynä: pisteen (paikka $r = (r_1, r_2, r_3)$, massa m , kulmanopeus ω) pyörimismäärä on $L_r = J_r \omega$, missä

$$(2) \quad J_r = m \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_1 r_2 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_1 r_3 & -r_2 r_3 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix}$$

ja missä vektorit r ja ω ovat annetut standardikannassa $\{i, j, k\}$.

3. PYÖRIVÄ KAPPALE

Tarkastelkaamme seuraavaksi suorakulmaisen särmiön muotoista kappaletta $S \subset \mathbb{R}^3$. Olkoot S :n särmien pituudet $2l_1, 2l_2$ ja $2l_3$ siten, että $0 < l_1 < l_2 < l_3 < \infty$. Oletamme kappaleelle vakiotiheyden $\rho > 0$ siten, että kappaleen massa on $M = 1$. Lisäksi kiinnitämme $\{i, j, k\}$ -koordinaatistomme origon kappaleen keskipisteeseen eli oletamme, että kappaleen keskipiste pysyy paikallaan¹.

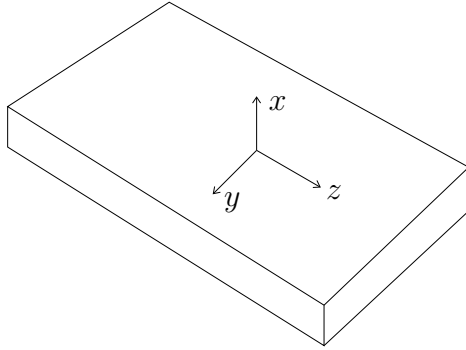
Jos kappale S pyörii origon kautta kulkevan akselin ympäri kulmanopeudella ω , niin kappaleen S pyörimismäärä saadaan integroimalla yhtälöä (2) yli kappaleen S . Toisin sanoen kappaleen pyörimismäärä on $L = J\omega$, missä matriisille $J = (J_{ij})_{i,j=1}^3$ pätee esim.

$$(3) \quad J_{11} = \int_S (r_2^2 + r_3^2) dr.$$

¹Johdannossa mainittu kappaleen heittäminen ilmaan (tai gravitaatio ylipäättään) ei merkittävästi vaikuta tutkimaamme ilmiöön, joten yksinkertaisuuden vuoksi kappaleen keskipiste voidaan olettaa paikallaanpysyväksi.

(Yhtälön (2) massat m summautuvat kokonaismassaksi $M = 1$.) Matriisi J eli kappaleen S *inertiamatriisi* riippuu vain kappaleen S ulottuvuuksista, ei pyörimisnopeudesta ω . Integraalin (3) laskeminen on kuitenkin meidän tilanteessamme ongelmallista, koska paikallaan pysyvässä kannassa $\{i, j, k\}$ pyörivän kappaleen S pisteiden r paikat riippuvat ajasta.

Luontevaa onkin tässä vaiheessa siirtyä kantaan $\{x, y, z\}$, joka on sidottu kappaleeseen S :



Kuva 3. Kappaleeseen S kiinnitetty ortonormaali kanta $\{x, y, z\}$.

Ortonormaalien kantojen $\{x, y, z\}$ ja $\{i, j, k\}$ origot yhtyvät ja kanta $\{x, y, z\}$ pyörii kappaleen mukana kulmanopeudella ω , joka tähän asti on annettu kannassa $\{i, j, k\}$. Kannassa $\{x, y, z\}$ pisteiden r paikat eivät riipu kulmanopeudesta ω , joten voimme hetkeksi unohtaa kulmanopeuden ja laskea auki integraalin (3) kannassa $\{x, y, z\}$:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_{-l_3}^{l_3} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_1}^{l_1} (y^2 + z^2) dx dy dz = 2l_1 \int_{-l_3}^{l_3} \int_{-l_2}^{l_2} (y^2 + z^2) dy dz \\ &= 2l_1 \int_{-l_3}^{l_3} \left(\frac{1}{3}y^3 + z^2y \right) \Big|_{-l_2}^{l_2} dz = 2l_1 \int_{-l_3}^{l_3} \left(\frac{2}{3}l_2^3 + 2l_2z^2 \right) dz \\ &= \frac{8}{3}l_1l_2^3l_3 + \frac{8}{3}l_1l_2l_3^3 = \frac{8}{3}l_1l_2l_3(l_2^2 + l_3^2). \end{aligned}$$

Vastaavasti $J_{22} = \frac{8}{3}l_1l_2l_3(l_1^2 + l_3^2)$, $J_{33} = \frac{8}{3}l_1l_2l_3(l_1^2 + l_2^2)$. Diagonaalien ulkopuoliset termit ovat nollia kannassa $\{x, y, z\}$, sillä esim.

$$J_{12} = - \int_{-l_3}^{l_3} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_1}^{l_1} xy dx dy dz = -2l_3 \int_{-l_1}^{l_1} x dx \int_{-l_2}^{l_2} y dy = 0.$$

Kannassa $\{x, y, z\}$ siis saamme

$$J = \frac{8}{3}l_1l_2l_3 \begin{pmatrix} (l_2^2 + l_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & (l_1^2 + l_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & (l_1^2 + l_2^2) \end{pmatrix},$$

missä $0 < l_1^2 + l_2^2 < l_1^2 + l_3^2 < l_2^2 + l_3^2 < \infty$ (sillä oletettiin $0 < l_1 < l_2 < l_3 < \infty$). Näin ollen voimme merkitä

$$(4) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

missä $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < \infty$.

4. KAPPALEEN LIIKEYHTÄLÖ

Aiemmin johdimme yhtälön $L = J\omega$ kannassa $\{i, j, k\}$. Koska kuitenkin laskimme matriisin J kappaleeseen S sidotussa kannassa $\{x, y, z\}$, niin myös ω tulee ilmaista kannassa $\{x, y, z\}$, ja tällöin vektori $L = J\omega$ tulee niin ikään ilmaistuksi kannassa $\{x, y, z\}$.

Koska kappaleeseen sidottu kanta $\{x, y, z\}$ pyörii standardikannan $\{i, j, k\}$ suhteen kulmanopeudella ω (tässä ω on annettu kannassa $\{i, j, k\}$), niin kanta $\{i, j, k\}$ pyörii kannan $\{x, y, z\}$ ympäri kulmanopeudella $-\omega$ (tässä taas ω on annettu kannassa $\{x, y, z\}$, mutta kyseessä on yksi ja sama vektori – vain kanta vaihtuu).

Newtonin toisen lain kulmamuoto sanoo, että inertiaalikoordinaatistossa kappaleeseen S kohdistuva kokonaisvääntö on yhtä kuin kappaleen pyörimismäärän muutos: $\tau = dL/dt$. Kappaleeseemme ei kohdistu ulkoista vääntöä (ja sisäiset väännöt kumoavat toisensa), joten kannassa $\{i, j, k\}$ pätee $dL/dt = 0$. Toisin sanoen: jos $L = L_1i + L_2j + L_3k$, niin pätee

$$\frac{dL_1}{dt}i + \frac{dL_2}{dt}j + \frac{dL_3}{dt}k = 0.$$

Toisaalta vektorille $L = L_1i + L_2j + L_3k$ saadaan soveltamalla tulon derivointisääntöä ja yhtälöä (1), että

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(L_1i + L_2j + L_3k) \\ &= L_1\frac{di}{dt} + \frac{dL_1}{dt}i + L_2\frac{dj}{dt} + \frac{dL_2}{dt}j + L_3\frac{dk}{dt} + \frac{dL_3}{dt}k \\ &= \frac{dL_1}{dt}i + \frac{dL_2}{dt}j + \frac{dL_3}{dt}k + L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{dj}{dt} + L_3\frac{dk}{dt} \\ &= 0 + L_1(-\omega \times i) + L_2(-\omega \times j) + L_3(-\omega \times k) \\ &= -\omega \times (L_1i + L_2j + L_3k) = -\omega \times L.\end{aligned}$$

(Tässä ω on annettu kannassa $\{x, y, z\}$ ja kanta $\{i, j, k\}$ pyörii kannan $\{x, y, z\}$ ympäri kulmanopeudella $-\omega$.) Koska samaisessa kannassa lasimme $L = J\omega$ ja J ei riippunut ajasta, niin pätee

$$\frac{dL}{dt} = J\frac{d\omega}{dt}.$$

Näin ollen yllä johdettu yhtälömme $dL/dt = -\omega \times L$ saa kappaleeseen S sidotussa kannassa $\{x, y, z\}$ lopullisen muotonsa

$$(5) \quad J\frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = 0,$$

missä J on kuten kohdassa (4).

Laskekaamme vielä yhtälö (5) auki koordinaateittain kannassa $\{x, y, z\}$; samalla siirrymme yhtälöryhmien lukemisen helpottamiseksi aikaderivaatan pistemerkintään $d\omega/dt = \dot{\omega}$.

Olkoon $\omega = \omega_1x + \omega_2y + \omega_3z$, jolloin $J\omega = \lambda_1\omega_1x + \lambda_2\omega_2y + \lambda_3\omega_3z$ ja

$$J\frac{d\omega}{dt} = \lambda_1\dot{\omega}_1x + \lambda_2\dot{\omega}_2y + \lambda_3\dot{\omega}_3z.$$

Edelleen

$$\begin{aligned}\omega \times J\omega &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \lambda_1\omega_1 & \lambda_2\omega_2 & \lambda_3\omega_3 \end{vmatrix} \\ &= \omega_2\omega_3(\lambda_3 - \lambda_2)x - \omega_1\omega_3(\lambda_3 - \lambda_1)y + \omega_1\omega_2(\lambda_2 - \lambda_1)z,\end{aligned}$$

ja viimein liikeyhtälö (5) komponenteittain on

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\lambda_3 - \lambda_2) = 0 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3(\lambda_3 - \lambda_1) = 0 \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \end{cases} .$$

5. LIIKEYHTÄLÖN ANALYYSI

Olemme vihdoin päässeet tilanteeseen, jossa voimme käsitellä varsinaista ilmiötämme lähtien yhtälöryhmästä (6). Oletamme siis, että särmiömme lähtee pyörimään yhden pääakselinsa (eli kantavektorin x, y tai z suuntaisen akselin) ympäri hetkellä $t = 0$. Jos kyseinen suunta on x , niin $\omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$, ja tällöin yhtälöistä (6) seuraa², että $\omega(t) \equiv \omega(0)$. Sama pätee suuntien y ja z tapauksissa, joten näyttäisi siltä, että kappale pyörii vakaasti minkä tahansa akselin ympäri. Käytännössä alkuheittomme ja olosuhteemme eivät kuitenkaan ole matemaattisen tarkkoja, joten realistisemmassa mallissa pyöriminen x -akselin ympäri hetkellä $t = 0$ tarkoittaa sitä, että $|\omega_1(0)|$ on suuri verrattuna pieneen lukuun $|\omega_2(0)| = |\omega_3(0)| = \varepsilon > 0$. Tällöin yhtälöryhmän (6) ensimmäisessä yhtälössä

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\lambda_3 - \lambda_2) = 0$$

on $\omega_2 \omega_3 = \varepsilon^2$ hetkellä $t = 0$, kun taas kahdessa muussa yhtälössä vastaavat termit ovat $\varepsilon \omega_1$. Näin ollen voidaan käsiä heilutellen³ approksimoida yhtälöryhmää (6):

$$\begin{cases} \lambda_1 \dot{\omega}_1 \approx 0 \\ \lambda_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (\lambda_3 - \lambda_1) = 0 \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \end{cases} .$$

Tästä voidaan edelleen käsiä heilutellen olettaa ω_1 vakioksi, jolloin yhtälö palautuu kahden tuntemattoman lineaariseksi ja vakiokertoimiseksi yhtälöksi

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (\lambda_3 - \lambda_1) = 0$$

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0.$$

Toisin kirjoitettuna (ratkaisemalla yhtälöpari) saadaan

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2} \omega_1 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3} \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} .$$

Tällaisen yhtälön ratkaisu on tunnetusti

$$(8) \quad (\omega_2(t), \omega_3(t)) = c_1 e^{\gamma_1 t} a_1 + c_2 e^{\gamma_2 t} a_2,$$

²Voitaneen osoittaa, että yhtälöryhmällä (6) on yksikäsitteinen ratkaisu $\omega(t)$, kun alkuarvo $\omega(0)$ tunnetaan.

³Lue: vailla kunnan perusteluja. Jaksaisiko joku tehdä tämän tarkasti?

missä γ_1 ja γ_2 ovat kerroinmatriisin ominaisarvot, a_1 ja a_2 ovat vastaavat (normeeratut) ominaisvektorit, ja vakiot c_1 ja c_2 on valittu siten, että $c_1 a_1 + c_2 a_2 = (\omega_2(0), \omega_3(0))$.

Yhtälössä (7) termit $\lambda_3 - \lambda_1$ ja $\lambda_1 - \lambda_2$ ovat erimerkkiset, mistä seuraa, että kerroinmatriisin ominaisarvot ovat kompleksiset:

$$\gamma_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)\omega_1^2}{\lambda_2 \lambda_3}} = \pm i\varphi \in \mathbb{C}.$$

Luvut c_1 ja c_2 ovat pieniä, sillä $|a_1| = |a_2| = 1$, $|e^{\pm i\varphi t}| = 1$ ja $|\omega_2(0)| = |\omega_3(0)| = \varepsilon$. Näin ollen ratkaisun (ω_2, ω_3) pituus pysyy pienenä eli vektori ω pysyy x -akselin suuntaisena.

Akselin z tapauksessa laskut ovat samanlaiset ja johtopäätös sama, mutta akselin y tapauksessa saadaan samalla filosofialla $\dot{\omega}_2 = 0$ ja

$$\begin{aligned}\lambda_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\lambda_3 - \lambda_2) &= 0 \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\lambda_2 - \lambda_1) &= 0.\end{aligned}$$

Tästä ratkaisemalla

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_2 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3} \omega_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Nyt $\lambda_2 - \lambda_3$ ja $\lambda_1 - \lambda_2$ ovat samanmerkkiset, mistä seuraa, että kerroinmatriisin ominaisarvot ovat reaaliset:

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)\omega_2^2}{\lambda_1 \lambda_3}} = \pm \varphi \in \mathbb{R}.$$

Tällä kertaa ratkaisussa (8) termi $c_2 e^{-\varphi t} a_2$ häviää nopeasti, mutta termi $c_1 e^{\varphi t} a_1$ kasvaa eksponentiaalisesti. Näin ollen ratkaisun (ω_1, ω_3) pituus ei pysy pienenä eli vektori ω ei pysy y -akselin suuntaisena.

VIITTEET

- [1] Carl V. Lutzer, Hammer Juggling, Rotational Instability, and Eigenvalues, Mathematics Magazine, Vol. 79, No. 4 (2006), 243–250.

E-mail address: havarpan@maths.jyu.fi